惯性导航原理与算法设计

牛小骥 陈起金 张全 编著

2025年3月

前言

这是一本写给惯性导航初学者的入门级教材。我们希望具备理工科专业本科二年级 数理基础的读者通过参考本书就能独立编程实现惯性导航算法和基础的组合导航算法。

惯性导航的概念比较抽象,公式推导复杂且环环相扣,初学者往往会望而却步;加 上诸多容易被误解或忽略的算法细节,让人不断掉入"陷阱",使得不少敢于尝试的初 学者倒在了半路上,没能"修成正果"。作者当初在学习过程中就感受过这种痛苦,在 最近十多年的教学实践中又有了更深的体会,因此希望通过这本书为大家开辟一条好 理解、可实行的学习途径。为此,本书尽量用直观形象、通俗易懂的语言来描述和解释 惯性导航相关的抽象概念和公式(虽然可能损失一定的严谨性);有时也会用一些比喻, 将其与大家熟悉的日常现象和知识建立起关联,以便读者对惯导算法形成感性认识和 理解,"在情感上"接受它。

惯性导航主要包含惯性器件和惯导系统两大部分,内容丰富且深刻,作者没有能力 也没有意愿全面覆盖这两方面。本书侧重惯导系统原理和惯导算法设计,对惯性器件的 介绍只是为了帮助读者更好地理解惯导系统和算法。对惯性器件感兴趣的读者可以参 考相关文献和资料自行学习。值得指出的是,惯性器件是惯性导航的灵魂,从根本上决 定了惯性导航的性能,是本领域的主要推动力量。国内外从事惯性器件研制的前辈和同 行们殚精竭虑的付出,创造了惯性导航技术长达 70 多年飞速发展的奇迹,并在今天把 整个惯导行业送到了工程技术的风口上!

风口上的惯性导航亟需一大批掌握惯导算法、能够开发惯导系统的人才,新入局的 学习者大多不具备相关专业知识和数理基础。本书面向本科高年级学生和硕士、博士研 究生,以及因工作需要或个人兴趣而学习惯导算法的工程师。本书可以作为导航专业的 教材,也可以作为从事惯性导航相关工作的工程师和技术人员的参考书。

本书在前半部分用了一定篇幅来讲解基础知识和惯导原理方面的内容,并把相关的数学基础和专业概念收集整理在一起,以方便初学者学习理解;然后集中讲述惯性导航器件原理、惯导算法及其误差建模与传播分析,并在最后一章拓展组合导航算法。已 经具备相关基础知识的读者可以直接跳过第2章,需要时再来查阅。惯导算法部分包含 密集的公式推导,内容环环相扣、前后关联,强烈建议读者边阅读边动手推公式,否则 很快会陷入"看天书"的状态。学完算法章节后,建议"趁热打铁",动手编程,实现 惯导算法和组合导航算法。

为了配合大家的编程实践,我们准备了配套的视频课程(www.bilibili.com 搜索"牛 小骥惯性导航")、课件(www.i2nav.cn)、开源代码和数据集(https://github.com/i2Nav-WHU/KF-GINS) 以及 QQ 讨论群(481173293),欢迎大家参考使用。

感谢西北工业大学严恭敏老师和山东科技大学周锋老师对本书做了审校工作。本书是以武汉大学开设的"惯性导航原理"课程课件为框架编写而成的,同时也参考了我

Ι

的博士后导师加拿大卡尔加里大学 Naser El-Sheimy 教授的课件,并得到了本团队若干师生的帮助。其中,刘川川和程亚豪协助整理了本课程的第一版课件,李由、张鹏辉参与了课件更新工作。王立强和柴江波协助整理了 IFTEX 代码和版本管理,柴江波整理了第2章内容初稿,王琰、樊静和李冰雁整理了第8章紧组合初稿,李思琪、戴雨杭、刘山做了部分内容录入工作,蒋郡祥、龚琳琳、李思琪、张文宇、高周正、葛雯斐、艾家豪、邓成剑、戴雨杭、刘山、丁鑫和付朝阳参与了书稿校对。在此一并表示诚挚的感谢!

尽管我们尽最大努力检核了书中内容,尤其是算法公式的准确性,但由于水平所限,疏漏之处在所难免,诚挚地希望读者理解和指正,并对本书内容提出意见和建议。 最后,"行胜于言",让我们开始吧!

> 作者 2024 年 12 月

作者简介

牛小骥,武汉大学卫星导航定位技术研究中心教授,博士生导师,珞珈特聘教授,惯性导航与组合导航学科带头人。清华大学博士,加拿大卡尔加里大学博士后,曾任美国 SiRF 公司上海研发中心高级研究员。长期从事惯性导航与组合导航技术研究和应用探索,并拥有十五年惯性导航教学经验。主持国家重点研发计划课题、自然科学基金项目,以及横向应用课题多项。研究成果获得工博会高校展区特等奖、高交会优秀产品奖、湖北省专利二等奖,本人获评武汉大学"我心目中的好导师"荣誉称号。指导学生多次获得美国导航学会 (ION) 优秀学生论文奖、IPIN 国际室内定位比赛冠军、全国研究生电子设计大赛等国内外学术奖项。累计发表学术论文 200 余篇;获批国家发明专利 50 余项,美国专利 4 项。

陈起金,武汉大学卫星导航定位技术研究中心副教授,博士生导师,武汉大学大地 测量学与测量工程博士。主要从事惯性测量、GNSS/INS 组合导航及动态精密工程测量 技术研究和教学工作。主持北斗重大专项课题、国家自然科学基金、湖北省重点专项等 科研项目多项,主持科技成果转化项目 10 余项。以第一作者/通讯作者发表 SCI 期刊 论文 20 余篇,授权国家发明专利 10 余项,参编行业标准 3 项。获 2023 年国家科技进 步二等奖(排名 4)、2022 年湖北省科技进步一等奖(排名 8)、2013 年美国导航协会 (ION)卫星导航年会学生论文奖。两项研究已完成科技成果转化,并规模化应用。

张全,武汉大学卫星导航定位技术研究中心副教授,博士生导师,武汉大学大地测 量学与测量工程博士,美国普渡大学博士后。主要从事 GNSS/INS 组合导航和多源融 合导航完好性技术研究。入选湖北省高层次人才特殊支持计划"青年拔尖人才项目", 获卫星导航定位科学技术一等奖 1 项(排名 2)。主持国家自然科学基金、国家重点研 发计划子课题、北斗重大专项子课题、产学研合作项目等科研与技术转化项目共 30 余 项,发表 SCI 论文 50 余篇(其中,第一/通讯作者 SCI 论文 20 篇),授权中国/国际发 明专利、软件著作权、参编行业标准等共 30 余项。

 \mathbf{III}

目 录

第1章	绪论	1
1.1	导航基本概念	1
1.2	直接定位	2
	1.2.1 几何交会定位	2
	1.2.2 数据库匹配定位	3
1.3	航位推算	3
1.4	从牛顿力学到惯性导航	5
	1.4.1 牛顿运动定律	5
	1.4.2 在惯性参考系中的惯性导航	6
	1.4.3 以地球为参考的惯性导航	6
1.5	本书内容安排	7
各2章	惯性导航基础	9
2.1	线性代数基础	9
	2.1.1 向量	9
	2.1.2 矩阵	10
	2.1.3 向量和矩阵基本运算	10
	2.1.4 向量和矩阵的微积分	16
	2.1.5 线性化方法	19
2.2	坐标系	20
	2.2.1 地心惯性坐标系	21
	2.2.2 地心地固坐标系	21
	2.2.3 导航坐标系	22
	2.2.4 载体坐标系	23
	2.2.5 传感器坐标系	24
2.3	地球椭球模型	24
	2.3.1 参考椭球	25
	2.3.2 地心位置向量	28
	2.3.3 参考椭球表面的曲率半径	30

	2.3.4	地球的正常重力场	32
2.4	随机过	t程	34
	2.4.1	高斯分布	35
	2.4.2	随机过程	36
	2.4.3	常用随机过程模型	37
第3章	惯性导	导航器件与系统	43
3.1	引言.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	43
3.2	加速度		44
	3.2.1	加速度计的力反馈设计	46
	3.2.2	加速度计的类型	47
3.3	陀螺仪	2	48
	3.3.1	转子陀螺	48
	3.3.2	振动陀螺	50
	3.3.3	光学陀螺	50
	3.3.4	MEMS 陀螺	52
3.4	惯性测	则量单元	52
3.5	惯性导	予航系统	55
	3.5.1	惯性坐标系下的一维惯性导航	55
	3.5.2	惯性坐标系下的二维平面惯性导航	56
	3.5.3	地球表面运动状态下的 IMU 输出	58
	3.5.4	惯性导航系统的类型	65
	3.5.5	惯性导航系统的特点和精度等级	67
3.6	惯性导	予航技术简史	68
3.7	惯性导	补航技术的典型应用	70
	3.7.1	军事应用	71
	3.7.2	专业应用	71
	3.7.3	日常应用	72
teter a ste	Jan Jal Z	化感用的 多色色色	70
第4章	「頃性作	传感	73
4.1		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	73
4.2	惯性传	₹感希误差	73
	4.2.1	零偏误差 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	75
	4.2.2	比例因于误差	77
	4.2.3	父 細耦 台 误 差	78
	4.2.4	随机噪声	80
	4.2.5	量化误差/量化噪声	82
	4.2.6	其他误差	83

		4.2.7	IMU 测量误差模型	84
	4.3	惯性传	感器误差的 Allan 方差分析	85
		4.3.1	Allan 方差	85
		4.3.2	误差类型及其 Allan 方差模型	88
		4.3.3	Allan 方差分析举例	92
	4.4	惯性传	感器标称参数的解读	93
		4.4.1	正确理解厂家标称的陀螺零偏	94
		4.4.2	典型 MEMS IMU 模块产品的标称参数	94
	4.5	IMU 设	吴差标定	100
		4.5.1	标定设备	101
		4.5.2	加速度计的六位置法静态标定原理	102
		4.5.3	陀螺的两位置法标定原理	105
		4.5.4	IMU 误差补偿	108
		4.5.5	系统级标定	108
kk	ह जेद	脚巴支	በ ሌራ ዓቶ አየት	110
矛	5 5 5 1	贝 哥利 司言	[外] 》 [] 任	110
	5.2	フロ・ 暦阜初		111
	0.2	贝·丁尔 5 9 1	如州市的一股赤连帕安小	111
		5.2.1	位置和速度的初始化	112
		523	描刻和俯仰角的初始业 (加速度计调平)	112
		524	航向初始化 (陀螺寻北)	115
	5.3	留析和	对准方法及误差分析	120
	0.0	531	御析粗对准百理	120
		532	解析粗对准误差分析	120
	5.4	主他初	始对准方法	120
	0.1			120
第	6 章	惯性导	¥航算法	128
	6.1	引言.		128
	6.2	姿态算	法	130
		6.2.1	欧拉角	130
		6.2.2	方向余弦矩阵	137
		6.2.3	四元数	147
		6.2.4	等效旋转矢量	159
		6.2.5	n 系下的姿态更新算法示例	168
	6.3	速度算	法	170
		6.3.1	位置和速度向量的导数	171
		6.3.2	速度微分方程	172

	$6.4 \\ 6.5$	6.3.3 n 系速度更新算法 位置算法 惯导机械编排算法设计	175 180 181
第	7章	惯导误差传播分析	183
	7.1	引言	183
	7.2	惯导误差方程	183
		7.2.1 姿态误差微分方程	189
		7.2.2 速度误差微分方程	192
		7.2.3 位置误差微分方程	193
	7.3	静基座惯导误差传播分析	194
		7.3.1 静基座误差方程	194
		7.3.2 简化的水平通道误差传播	195
		7.3.3 高程通道误差传播	198
笡	8 音	INS/GNSS 组合导航	199
1	8.1		199
	8.2	卡尔曼滤波	200
	8.3	INS/GNSS 松组合算法设计	201
	0.0	8.3.1 系统方程	202
		832 观测方程	206
		833 误差反馈	210
		834 状态初始化	211
	8.4	INS/GNSS 伪距紧组合算法设计	211
	0.1	8.4.1 GNSS 伪距/多普勒观测	211
		8.4.2 系统方程	213
		8.4.3 伪距观测方程	214
		8.4.4 GNSS 测量误差随机模型	218
	_ • .		
附	录A		220
	A.1	安念表达式的相互转换	220
	A.2	四元数的旋转算子	223
附	录 B	符号表	226
参	考文南	₹	229

第1章 绪论

什么是惯性导航?"惯性"和"导航"两词并不陌生,但初次听闻"惯性导航"时, 不少读者可能对其内涵感到困惑。为此,本章先介绍一些导航相关的基本概念,并限定 本书的主题范围;然后尝试勾勒出惯性导航基本原理的"全局图",以帮助读者快速建 立起对惯性导航的初步认识。

1.1 导航基本概念

导航(navigation)是指在特定的参考系内将运动物体从起始位置引导到目的地的 过程。其中运动物体包括飞机、车辆和舰船等,通常被称为载体,参考系是地球表面、 太空或其他任何定义明确的坐标系。导航是一个复杂的过程,以地面车辆为例,首先要 确定车辆的初始位置和目的地;然后进行路径规划;在导航任务启动后,还要实时测量 载体的导航参数(例如位置、速度、航向等),随时调整下一步的路径,最终将载体引 导至目标点。需要注意的是,**本书的导航概念限定在感知和测量载体的导航参数,不涉** 及路径规划与引导控制。

准确描述载体在三维空间中的运动状态需要一系列参数。在中学力学分析中,常将 物体抽象为只有质量但没有体积的质点,并用位置和速度来描述其运动状态。在实际的 导航系统中,载体不能简化为质点,除位置和速度外,载体在空间中的指向(即姿态) 同样重要。例如,在飞机着陆过程中,需要调整好飞机的姿态,使其航向与跑道对齐。 位置、速度和姿态构成载体的一套基础的导航参数。在很多应用场景中,为了更好地控 制载体,还需要测量其加速度、角速度和角加速度等,这些也属于导航参数。本书中的 导航,就是用导航系统测量或估计载体的这些时变的导航参数。

导航过程需要基于导航器件(即导航传感器)来实现,但是导航器件并不等同于导航系统。导航器件是最前端、最基础的载体运动感知单元,输出未经导航解算的原始观测数据,而非导航参数。而导航系统则需要对导航器件输出的原始信息进行加工、处理和解算,得到载体的位置、速度和姿态等参数。因此,一个完整的导航系统不仅包含导航器件,还有导航算法,以及需要辅助支持性的设备,包括导航计算机、供电系统、数据接口、外壳等。

导航定位的应用需求包括以下三类:1)导航,即前文所述的将载体从起点引导至 设定目的地的过程。例如,日常生活中使用手机导航软件就是典型的导航:软件的定 位功能首先确定用户的当前位置,用户输入目的地;导航引擎进行路径规划;用户确 认并开始导航后,系统持续做实时定位,逐步引导用户到达目的地。2)瞄准或者定向 (pointing),例如在大型游轮上接收卫星电视频道,要求不论游轮如何转向或受到风吹 浪打,卫星天线都必须准确指向通信卫星,这就要求知道载体每时每刻的位置和姿态, 以便及时调整卫星天线的朝向。3)基于位置的服务 (location-based service, LBS),例

1

如网约车服务,手机打车软件的后台调度系统不仅需要用户的位置和目的地,还需要知 道该区域所有可用车辆的位置和行驶方向,才能实现高效的调度。在这些过程中,都需 要精确的位置和姿态等导航参数。

导航定位技术根据其原理,可粗略地分为直接定位和航位推算。直接定位是根据观测量直接确定载体的位置,例如全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)接收机可以通过单个历元的观测值直接计算载体瞬时的三维位置坐标。航位推算是一种相对定位手段,它通过测量导航状态的变化量,然后将其叠加至前一时刻的导航状态,得到新的导航状态参数。

1.2 直接定位

直接定位方法包括几何交会定位和数据库匹配定位两类。接下来以典型案例简述 其基本原理。

1.2.1 几何交会定位

几何交会定位是直接测量载体相对于位置已知的基站的距离、角度、距离差等几何 参数,通过后方交会算法来计算载体的位置。以二维平面上的测距定位为例,其原理如 图1.1所示。根据平面几何原理,与某定点等距的点形成以该定点为圆心,距离为半径的 圆。测量载体到两个已知基站点的距离,便得到两条圆曲线,它们一般会有两个交点, 其中一个交点即为载体的位置。若再加入第三个已知基站点的距离测量,3个圆相交的 唯一点即为载体位置。GNSS 定位的基本原理即是测距定位,不过是在三维空间中。通 常,通过测量不少于4颗已知空间坐标的 GNSS 卫星与 GNSS 接收机的距离(伪距或 载波相位观测值),应用后方交会算法即可计算出接收机天线的三维位置及接收机钟差。



图 1.1 距离交会定位示意图

1.2.2 数据库匹配定位

数据库匹配定位,又称为特征匹配定位,是一种在日常生活中普遍存在的定位方 式,大多数动物都具备这种导航能力。例如,人类通过视觉识别有特点的地标并与头脑 中记忆的知识库匹配来确定位置。比如访问武汉大学时,一旦看到武大牌坊或行政楼, 与校园地图比对,便能大致知晓自己的位置。对于机器,例如飞机,地形匹配是数据库 匹配定位的典型方法。地球表面各地的高程起伏变化特征,可看作与位置相关的"指纹 特征"。飞机的地形匹配定位系统通过预先测绘的导航区域的地形图建立数据库,飞行 时扫描下方的局部地形,并与数据库做搜索匹配,以确定飞机坐标,如图1.2所示。匹配 定位的特征还包括视觉、地磁、环境磁场、重力场及其他环境特征。



图 1.2 地形匹配定位示意图

直接定位的优势在于能够直接确定载体在指定坐标系中的绝对位置坐标。然而,其 缺点是往往对外部环境的依赖性较强。无论是几何交会定位还是数据库匹配定位,都需 要定位系统与定位基站或地面环境保持信号通视条件。一旦观测信号受阻,定位精度可 能降低,甚至无法进行定位。另外,几何交会定位需要布设和维护全套定位基站(例如 GNSS 星座);数据库匹配定位则需要预先建立和维护特征数据库,一般都会既耗时又 费力。因此,直接定位方法易受环境因素影响,造成定位精度下降甚至中断,并且还要 承担软硬件基础设施建立和维护的成本。

1.3 航位推算

航位推算也称航迹推算(dead-reckoning, DR),在惯性导航技术出现之前便已用 于海上导航。关于这一术语英文名称的确切起源,学界尚存争议。有学者认为它可能源 自 "deduced reckoning"(推算导航),"deduced" 缩写为"ded",在现代英语的书写习惯 中,"ded"又逐渐写为"dead"[1, p.9]。图1.3以二维平面导航为例阐述航位推算定位的 基本原理。假设已知载体的初始位置 P₀,该位置向量可用参考坐标系下的坐标 (e₀,n₀) 来表示。同时,假设载体的导航传感器能够测量当前时刻相对于前一时刻的位移变化向量,这包括向量长度和相对于参考坐标系坐标轴的夹角(即方向)。通过将位置变化量与前一时刻的位置坐标相加,便可计算出当前时刻载体的位置坐标,依此类推,通过不断累积位移变化量,可计算出后续任意时刻载体的位置坐标。



图 1.3 航迹推算示意图(根据参考文献[2]重绘)

DR 系统也可以通过测量载体的速度或加速度,并对这些测量值做一次或二次时间 积分,将其转化为位移变化量。位移或速度测量传感器通常测量的是投影在载体坐标系 下而非选定的参考坐标系下的行进距离(即里程)或速率,例如,车辆里程计通过测量 车轮转动圈数来计算其前进距离,其车速或里程的测量值是投影在车辆坐标系下的。为 了将这些测量值转化到选定的参考坐标系(例如当地水平坐标系)的轴线上,还需要测 量车辆的姿态,即车辆坐标系相对于参考坐标系的角度关系。姿态的测量相对复杂,可 以通过不同的方式实现。例如,可以用磁力计测量航向角,用倾斜计测俯仰角和横滚角; 或者利用陀螺仪测量载体的三维姿态变化,积分或累加后获得姿态。

航位推算的原理相对简单直观,但是实现航位推算定位或构建航位推算系统不可 避免的将面临以下四个核心问题[1];

- 计算载体相对于哪个参照物的位置或位置变化? (需要指参考坐标系)
- 从哪个位置和从什么初始朝向开始进行航位推算?(需要初始化)
- 如何测量载体的方向、位移或速度的变化?(需要对应的传感器)
- 如何综合处理上述信息和观测值? (需要导航算法)

DR 系统具有自主性好和导航结果连续等优点。因为 DR 系统只需感知自身位置和 姿态的变化量,所采用的方向、位移或速度等传感器通常是自主工作的,且隐蔽性好。 DR 是累加或积分的过程,其导航结果在时间上是连续无缝的。然而,也是因为这种累 加或积分过程,DR 存在一个固有缺点:导航精度随时间或里程发散,即误差累积。因为 DR 每一步导航状态变化的测量值都有误差,随着累积次数或积分时间的增加,误差不 断放大,精度逐渐发散。DR 系统的累积误差通常需要通过直接定位信息(例如 GNSS 定位)来进行校正。DR 系统与直接定位的优缺点是完全互补的,二者组合是顺理成章 的,能够实现优势互补,进而得到理想的导航定位效果。

惯性导航系统(Inertial Navigation System, INS)是一个导航信息全面的三维航位 推算系统。其导航传感器包含三轴加速度计和三轴陀螺仪,能够测量载体相对于惯性空 间的加速度和角速度信息。通过导航计算机进行积分运算得到载体的位置、速度和姿态 变化量,结合初始导航参数,可实时提供载体在三维空间中的位置、速度和姿态等导航 参数。由于 INS 以惯性空间为参考基准,完全自主工作,适用范围广泛,除了常见的海 陆空领域,还包括深地、深海、深空,几乎适用于所有场景。

1.4 从牛顿力学到惯性导航

传统惯性器件以经典力学为理论基础。牛顿力学三定律为惯性导航技术奠定了理 论基础。然而,从 1687 年牛顿提出力学三定律到惯性导航系统的问世,经历了近 300 年的时间,期间主要缺乏将理论转化为实际导航系统的巧妙设计思想和精密的制造工 艺。本节将解释牛顿运动定律与惯性导航基本原理之间的内在联系,并帮助读者建立起 从牛顿力学到惯性导航算法的概略图。

1.4.1 牛顿运动定律

牛顿第一运动定律指出:"任何物体都要保持匀速直线运动或静止状态,直到外力 迫使它改变运动状态为止。"该定律与航位推算的关系是不言而喻的,因为它指出在没 有外部作用力的情况下,只要精确测量出物体的运动时间,就可以**根据物体当前的速度 和位置推算出其未来任意时刻的位置**。

牛顿第二运动定律建立了物体质量、加速度和所受作用力之间的函数关系,表述为:"物体加速度的大小跟作用力成正比,跟物体的质量成反比,加速度的方向跟作用力的方向相同。"该定律的简化表达形式为

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}\mathbf{a} \tag{1.1}$$

其中, F 代表作用力, m 为物体的质量, a 是加速度向量。

根据上述力学方程,假设能够测量载体的运动加速度 a,那么在已知初始位置和初始速度的基础上,通过对加速度积分可计算载体的速度,而对速度积分便可得到位置, 从而实现三维航位推算。方程(1.1)指出,对物体所受的外部作用力和对加速度的测量是 等价的。因此,若能够测量载体所受的外部作用力,便能推导出相应的加速度。

牛顿第三运动定律表述为:"相互作用的两个质点之间的作用力和反作用力总是大小相等,方向相反,作用在同一条直线上。"这一定律指出,物体所受的某些作用力可以直接测量,也可以通过测量其反作用力来确定。

牛顿运动定律只在惯性坐标系下成立。什么是惯性坐标系?这是一个看似简单实则 非常深刻的问题,涉及我们对时间和空间的理解。惯性坐标系的经典定义是牛顿运动定 律成立的坐标系,又称牛顿坐标系,是绝对空间中绝对静止的刚性轴系。牛顿运动定律 及其依赖的惯性坐标系,最初都是在研究行星运动的背景下推导出来的。行星的位置是 相对于背景恒星来描述和确定的,背景恒星构成的天球坐标系足够静止,对于导航来说 是一个足够精确的在宇宙中绝对不动的有效的惯性参考系。任何相对于惯性参考系以 恒定速度运动的坐标系也是一个惯性参考系。因此,惯性参考系有无数个,它们像牛顿 绝对空间那样弥漫于整个宇宙空间。随着广义相对论的提出,人们的绝对时空观发生了 根本性的变化,然而这并不影响惯性导航在工程上对惯性坐标系的使用。惯性坐标系的 详细定义见第2章2.2.1小节。

1.4.2 在惯性参考系中的惯性导航

在惯性坐标系中,依据牛顿力学定律实现惯性导航在理论上最为简便,因为牛顿运动定律在此体系中自然成立,无需额外补偿项。尽管如此,构建此类导航系统仍具挑战性,需包含以下关键环节:

- 建立并维持惯性参考框架:需在载体上构建一个与惯性坐标系轴线对齐的坐标系,详见第2章2.2节。这要求研制能够测量载体相对于惯性空间角运动的传感器,即陀螺仪,详见第3章3.3节。
- 测量载体相对惯性空间的运动加速度: 需研制能够测量载体相对于惯性坐标系 加速度的传感器, 即加速度计, 详见第3章3.2节。
- 对加速度观测值做积分运算:为推算载体相对于惯性坐标系的速度和位置,需设计惯性导航算法,并配备能够执行该算法的导航计算机,详见第3章3.5节和第6章。

如何建立和维持一个原点在载体,轴线始终与惯性坐标系对齐的惯性参考框架?例 如,要计算一艘已进入深空的宇宙飞船沿天球北极方向上的位移,假设载体上前向加速 度计始终指向天球北极方向,则导航的实现将较为直接,对该加速度计测量值积分即可 获得速度和位移。然而,飞船的船头并非始终指向天球北极,随时都可能调整姿态,从 而造成加速度计指向的变化。解决方法有两种:一是利用陀螺构建一个与载体姿态运动 隔离的物理稳定平台,在此平台上安装始终指向天球北极和另外两个正交方向的加速度 计;二是将加速度计和陀螺仪都固定在载体上,通过陀螺仪测量载体与惯性坐标系的角 度关系,构建一个虚拟的惯性稳定的"数学平台",然后将加速度计在载体坐标系下的 测量值投影到惯性坐标系的轴线上。前者称为平台式惯导 (gimballed INS,或 platform INS),后者称为捷联式惯导 (strapdown INS),这一概念将在第3章3.5.4小节详细讨论。

1.4.3 以地球为参考的惯性导航

本书主题限定于地球表面和地表附近的惯性导航问题。因此,通常关注的是载体相对于地面的速度和位置,或是相对于固定在地面的起始位置与目标点之间的相对位移,

而非载体相对于恒星天球的位置。需要注意的是,地球或与之固定的坐标系并非惯性坐标系,因为地球相对于恒星天球有自转和绕太阳公转的角运动和加速线运动。在以地球为参考进行惯性导航时,必须意识到牛顿运动定律在这一非惯性坐标系中并不直接适用。因此,除了1.4.2小节中提到的三个关键环节,还需进行以下修正,以确保牛顿力学定律继续适用。

- 旋转坐标系中的力学修正:在地球坐标系下观察,加速度计不仅受到外部作用力产生运动加速度,还受到一些神秘的"虚拟力"。在转动坐标系中,典型的虚拟力包括"离心力"和"哥氏力(Coriolis force)"等。这些力纯粹是因为观察者站在一个旋转的非惯性坐标系下观察所导致的。为了使牛顿定律在此情况下仍然有效,必须在观测数据中对这些虚拟力进行修正,详见第3章3.5.3节和第6章。
- •地球引力场的影响:地球附近的载体都受到地球万有引力的作用,地球引力将 影响载体的运动加速度的测量,因为它是被测力的组成部分。加速度计无法直 接测量引力,只能测量与之对应的某种反作用力。惯性导航过程中,需要从加 速度计测量中扣除引力加速度分量。因此,了解地球引力场模型是必要的,参 见第2章2.3节,并且需要实时计算并补偿当前时刻的重力加速度,具体方法详见 第3章3.2节和第6章。
- 地球曲率的影响:地球总体呈现椭球形状。当载体沿着地表朝某个方向做直线运动时,实际上在惯性空间中其轨迹是一条曲线。这增加了表示位置和运动的复杂性,因为看似单纯的线运动实际上既有线运动又有角运动,详见第3章3.5.3小节。上述因素增加了惯性导航解算的复杂性和理解难度。这些问题将在第3章3.5.3小节中进一步阐释,并在第6章的算法部分进行推导。

1.5 本书内容安排

第2章介绍惯性导航所需的数学和大地测量基础知识。导航参数的表达和惯性导航 算法设计需要线性代数与微积分等数学基础。惯性导航解算是一个多坐标系的运动学 问题,理解不同坐标系间的差异和转换关系对于学习惯导算法至关重要。此外,地球附 近空间的导航常以地球为参照,描述其运动状态需要定义参考椭球模型。

第3章介绍实现惯性导航所需传感器——加速度计和陀螺仪的基本测量原理和实现 方式,旨在帮助初学者建立起对惯性器件的基本认识;然后讨论这些惯性传感器如何组 成三维导航所需的惯性测量单元,并详细解析了一维、二维和三维惯性导航的基本原理 和关键技术;最后,本章将简要回顾惯性导航技术,尤其是陀螺仪的发展历程,并对惯 性技术的应用领域进行概括。惯导技术发展简史放在本章讲述而没有放在第1章,主要 是考虑到在理解惯性器件和惯导系统原理的基础上,读者才能更好地理解该技术的发 展历程。

第4章介绍惯性传感器的误差和测试标定。本章首先对惯性传感器的误差进行分类, 并构建了惯性测量单元的测量误差模型。接着,介绍了 Allan 方差分析方法及其在分析 惯性传感器随机误差中的应用。由于惯性导航领域的术语和符号尚未统一,本章将详细 解读一款典型微机械惯性测量单元的产品手册,以帮助读者更好地理解相关术语。最后,本章将介绍惯导系统误差标定的基本原理与方法。

第5章介绍高精度惯导静态解析粗对准的基本原理和误差分析。初始对准没有作为 第6章惯导算法的一个环节放在后面阐述,而是在惯导算法前面单独介绍,主要是因为 初始对准能够很好地反映惯性器件所感知的物理量,对于读者理解惯导基本原理有很 大的帮助。

第6章详细介绍惯性导航算法,重点放在姿态和速度算法上。首先,介绍欧拉角、方向余弦矩阵、四元数和等效旋转矢量这四种姿态参数,并推导了它们的微分方程。通过 求解姿态微分方程得到递推计算式,实现姿态更新。然后,推导不同坐标系下的速度微 分方程,求解该方程并做时间离散化处理,得到速度的递推计算式,实现速度更新。

第7章推导了惯性导航的误差微分方程,它们是惯导误差传播和组合导航的基础。 在此基础上对静基座惯导误差传播做了简化分析,并讨论舒勒调谐这一惯导系统的本 质特征。

第8章是惯性导航的拓展,介绍了面向通用场景的 INS/GNSS 松组合和伪距紧组合算法。

附录部分是一些必要的补充内容。附录A.1给出了不同姿态表达式之间的相互转换 方法,附录A.2是四元数旋转算子的证明。鉴于本书公式和符号繁多,附录B列出了主要 数学符号,供读者参考查阅。

第2章 惯性导航基础

本章介绍理解惯性导航所需的基础知识,包括线性代数基础、常用坐标系、地球椭 球模型、随机过程和卡尔曼滤波等。我们把惯性导航涉及的数学和时空基准理论基础收 集并整理在一起,方便读者学习,节省查资料的时间。通晓相关内容的读者可以直接跳 过本章。

2.1 线性代数基础

线性代数是数学的重要分支,在科学和工程领域有广泛应用。惯性导航计算需要线 性代数的工具来描述导航状态及其运算,主要涉及向量与矩阵运算,以及非线性运动学 方程的线性化等内容。鉴于本书主题与篇幅,此处仅列出惯性导航相关的数学概念与定 理,没有给出相关的证明,也不过分追求数学理论上的完备性。

2.1.1 向量

向量(vector),也称矢量,是空间中的一段有长度和方向的线段。本书默认使用 小写粗体字母来表示向量。向量的长度称为向量的模。模值为1的向量称为单位向量 (unit vector)。

在数学表述上,通常使用坐标映射的方式,用一组有序排列的数来表示向量。这样 一组数是向量在给定参考坐标系中各坐标轴方向上的投影,称为向量在参考系中的投 影分量或坐标。本书默认将向量的坐标写成列向量形式。例如,任意状态向量 v 在 p 系 下的投影分量记作

$$\mathbf{v}^{\mathrm{p}} = \begin{vmatrix} \mathrm{v}_{1} \\ \mathrm{v}_{2} \\ \vdots \\ \mathrm{v}_{\mathrm{n}} \end{vmatrix}$$
(2.1)

在讨论导航问题时,常用三维向量来表示位置、速度、加速度、角速度等导航参数。 在使用和操作向量时,务心区分向量和向量的坐标,本书所述向量是独立于参考坐标系 而存在的所谓自由向量,而向量的坐标只有在明确指定参考坐标系(又称投影坐标系) 后才有意义。本书在使用向量的坐标形式或做坐标运算时会明确地将投影坐标系写为 向量的右上标。同一向量在不同的坐标系下的坐标不同,在惯性导航解算过程中常需做 向量的坐标变换。

列向量转置(用右上标"⊤"表示)后变成行向量,表示为

$$\left(\mathbf{v}^{\mathrm{p}}\right)^{\top} = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \cdots & \mathrm{v}_n \end{bmatrix}$$
 (2.2)

向量的长度叫作模 (magnitude 或 length),记作 ||**v**||,其数值可根据坐标分量计算 得到:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \tag{2.3}$$

2.1.2 矩阵

一个 m × n 的矩阵是由 m × n 个数组成的 m 行 n 列的数表。书中使用大写粗体字 母表示矩阵。m 行 n 列的矩阵 A 记作

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$
(2.4)

式中, a_{ij} 表示矩阵第 i 行 j 列的元素。矩阵可以看作 m 个行向量的排列, 或是 n 个列 向量的排列。矩阵的转置是指其行与列交换后形成的新矩阵, 写作

$$\mathbf{A}^{\top} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
(2.5)

行数与列数相等的矩阵称为方阵。若一个方阵的对角线元素均为 1, 而非对角线元素均为 0, 则该方阵为单位阵。n 阶单位矩阵记作 **I**_n。

$$\mathbf{I}_{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
(2.6)

2.1.3 向量和矩阵基本运算

前面提到,向量可以用一组有序排列的数来表示,但并非所有有序排列的数都是向量。例如,在惯性导航的姿态算法中,三个欧拉角虽然常记作 3×1 的列向量形式,但它们不是向量,因为欧拉角组不满足向量的加法和数乘等基本运算,不能通过简单地将两组欧拉角相加来表示姿态的合成。具体细节将在第6章6.2.1.6小节中详细讨论。因此,在学习过程中,必须特别注意区分真正的向量和有序数列。

2.1.3.1 向量基本运算

下面用向量坐标的形式来描述其基本运算,注意原始向量、结果向量都采用相同的 投影坐标系,写作右上标 p。

向量数乘

向量可以直接与数字相乘,结果等于原向量方向不变并缩放长度后形成的新向量。 向量的数乘可用来实现向量缩放或导航状态量的内插。

向量点乘 (dot product)

两个向量的点乘又叫向量内积,其结果为标量。任意两个同维度向量 x 和 y 的内 积记作 x · y, 定义为

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$
(2.7)

式中 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 为两个向量的夹角, cos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 表示两个向量的方向余弦。如果已知向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 在坐标系 p 中的坐标,则可以方便地计算点乘结果:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}^{\mathrm{p}})^{\top} \mathbf{y}^{\mathrm{p}}$$

= $\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x}_{\mathrm{i}} \mathrm{y}_{\mathrm{i}} = \mathrm{x}_{1} \mathrm{y}_{1} + \mathrm{x}_{2} \mathrm{y}_{2} + \dots + \mathrm{x}_{\mathrm{n}} \mathrm{y}_{\mathrm{n}}$ (2.8)

从式 (2.7) 易得,向量点乘满足交换律,即

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \tag{2.9}$$

向量的点乘结果不依赖投影坐标系,对于任意两个投影坐标系 p 和 q,有

$$\mathbf{x}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y}^{\mathbf{p}} = \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \tag{2.10}$$

如果 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, 且 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 均为非零向量,则 cos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$,即向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 相互正交 (orthogonal)。如果 n 个非零向量不但相互正交,且模值都为 1,则称它们是标准正交。 对于任意向量 \mathbf{x}, \mathbf{y} 和 \mathbf{z} ,向量的点乘还满足以下运算:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \tag{2.12}$$

2.1.3.2 三维向量运算

针对三维向量专门定义的运算有向量叉乘和三重积等。

向量叉乘 (cross product)

两个三维向量的叉乘又称外积或向量积,向量 x 和 y 的叉乘记作 x × y。两个三 维向量叉乘的结果仍是三维向量,结果向量的方向垂直于这两个向量,遵从右手定则¹, 其模值等于以 x 和 y 为邻边的平行四边形的面积,如图2.1所示。

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta) \mathbf{n}$$
(2.13)

¹所谓右手定则是指:如图2.1所示,右手手掌张开,四指并拢,大拇指垂直于四指方向;然后,右手四 指弯曲,与第一个向量旋转到第二个向量的方向一致,那么大拇指指向的方向即为叉乘结果向量的方向。

式中, n 为与结果向量同向的单位向量, $\theta \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 为从向量 x 到 y 的转动角度。从上 述定义易知, 向量叉乘不满足交换律, 交换向量顺序有

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \tag{2.14}$$



图 2.1 向量的叉乘

如果 $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 且 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 均为非零向量,则 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 共线。因此,有 $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。若 已知向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的坐标,其叉乘计算公式如下:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{p}} \times \mathbf{y}^{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ y_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2}y_{3} - x_{3}y_{2} \\ x_{3}y_{1} - x_{1}y_{3} \\ x_{1}y_{2} - x_{2}y_{1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -x_{3} & x_{2} \\ x_{3} & 0 & -x_{1} \\ -x_{2} & x_{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ y_{3} \end{bmatrix} \triangleq (\mathbf{x}^{\mathrm{p}} \times) \mathbf{y}^{\mathrm{p}}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & y_{3} & -y_{2} \\ -y_{3} & 0 & y_{1} \\ y_{2} & -y_{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \end{bmatrix} \triangleq -(\mathbf{y}^{\mathrm{p}} \times) \mathbf{x}^{\mathrm{p}}$$
$$= -\mathbf{y}^{\mathrm{p}} \times \mathbf{x}^{\mathrm{p}}$$

式中, (x^p×)称作向量坐标 x^p的反对称矩阵,将在本章2.1.3.4小节进一步讨论。

$$(\mathbf{x}^{p}\times) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{x}_{3} & \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} & 0 & -\mathbf{x}_{1} \\ -\mathbf{x}_{2} & \mathbf{x}_{1} & 0 \end{bmatrix}$$
(2.16)

向量的叉乘也可以用行列式的形式表示为

$$\mathbf{x}^{\mathrm{p}} \times \mathbf{y}^{\mathrm{p}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{x}_{1} & \mathbf{x}_{2} & \mathbf{x}_{3} \\ \mathbf{y}_{1} & \mathbf{y}_{2} & \mathbf{y}_{3} \end{vmatrix}$$
(2.17)

式中, \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 分别是投影坐标系²p的 x、y和 z 轴的单位向量。

2本书一律采用右手坐标系。

对于任意三维向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} , 及标量 r 和 s, 向量的叉乘运算还满足以下定律:

$$(r\mathbf{a}) \times (s\mathbf{b}) = (rs)\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$
$$(2.18)$$
$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

下面举例说明向量叉乘在惯性导航算法中的一个典型应用。如图2.2所示,假设某 刚体以角速度 ω 绕 ℓ 轴旋转,在 ℓ 轴上任取一点 O 作为位置向量 r 的起点,则根据 物理学上线速度与角速度间的关系可知,刚体上任一点 M 的线速度向量 v、位置向量 r 和角速度向量 ω 满足叉乘关系:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{2.19}$$



图 2.2 向量叉乘示例

三重积

三重积是3个三维向量的复合相乘,在实际运算中非常有用,可分为标量三重积和 向量三重积。

(1) **标量三重积**:对于任意三维向量 **a**、**b** 和 **c**,标量三重积定义为 **a**·(**b**×**c**),其 结果为标量,从几何角度理解为 3 个向量张成的平行六面体的体积,如图2.3所示。容 易验证:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$
 (2.20)



图 2.3 向量的标量三重积

(2) 向量三重积,又称三矢积,是3个向量的连续复合叉乘,其结果为向量。对于 任意三维向量 a、b 和 c,有

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$
(2.21)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$
 (2.22)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$
(2.23)

向量的投影变换

任意三维向量 v 在坐标系 p 和 R 之间的坐标变换记作

$$\mathbf{v}^{\mathrm{R}} = \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{R}} \mathbf{v}^{\mathrm{p}} \tag{2.24}$$

式中, **C**^R_p是 3×3 的坐标变换矩阵, 是一个正交矩阵, 详见本章2.1.3.4小节和第6章6.2.2小节。投影变换后向量的反对称矩阵满足

$$\left(\mathbf{v}^{\mathrm{R}}\times\right) = \left[\left(\mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{R}}\mathbf{v}^{\mathrm{p}}\right)\times\right] = \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{R}}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{p}}\times\right)\left(\mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{R}}\right)^{\top}$$
 (2.25)

对于任意三维向量 a 和 b, 及投影坐标系 p 和 R, 有

$$\mathbf{a}^{\mathrm{R}} \times \mathbf{b}^{\mathrm{R}} = \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{R}} \left(\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times \mathbf{b}^{\mathrm{p}} \right) = \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{R}} \left(\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times \right) \mathbf{b}^{\mathrm{p}}$$
(2.26)

2.1.3.3 矩阵的基本运算

矩阵加法

相同大小的矩阵可以相加,结果矩阵 C 满足

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{c}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} + \mathbf{b}_{ij} \tag{2.27}$$

矩阵乘法

 $m \times n$ 的矩阵只能与 $n \times p$ 的矩阵相乘,即左矩阵的列数必须等于右矩阵的行数。乘积矩阵 C 满足:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$$
(2.28)

将矩阵 A 和 B 分别写为行向量和列向量的形式,可以简便地定义矩阵乘法:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1} \\ \mathbf{a}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1} & \mathbf{b}_{2} & \cdots & \mathbf{b}_{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1} \cdot \mathbf{b}_{1} & \mathbf{a}_{1} \cdot \mathbf{b}_{2} & \cdots & \mathbf{a}_{1} \cdot \mathbf{b}_{p} \\ \mathbf{a}_{2} \cdot \mathbf{b}_{1} & \mathbf{a}_{2} \cdot \mathbf{b}_{2} & \cdots & \mathbf{a}_{2} \cdot \mathbf{b}_{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m} \cdot \mathbf{b}_{1} & \mathbf{a}_{m} \cdot \mathbf{b}_{2} & \cdots & \mathbf{a}_{m} \cdot \mathbf{b}_{p} \end{bmatrix}$$
(2.29)

式中, $\mathbf{a}_k(k = 1, 2, \dots, m)$ 表示矩阵 **A** 各行元素组成的行向量; $\mathbf{b}_i(i = 1, 2, \dots, p)$ 表示 矩阵 **B** 各列元素组成的列向量。矩阵乘法不满足交换律, 即

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{2.30}$$

对矩阵的乘积转置,满足:

$$\left(\mathbf{AB}\right)^{\top} = \mathbf{B}^{\top} \mathbf{A}^{\top} \tag{2.31}$$

矩阵的逆

如果两个方阵的乘积是单位阵,则称它们互为逆矩阵。

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_{\mathrm{n}} \tag{2.32}$$

若方阵 A 可逆,则其行列式不等于零,即

$$|\mathbf{A}| \neq 0 \tag{2.33}$$

2.1.3.4 特殊的矩阵

对角矩阵 (diagonal matrix)

对角矩阵是只在主对角线上含有非零元素、其他元素均为零的方阵。本书用 diag(**v**) 表示对角元素由向量 **v** 的元素确定的对角方阵。对角矩阵常用于放大某个向量,例如 diag(**v**)**x** 表示将向量 **x** 中的每个元素 x_i 放大 v_i 倍。这在表示惯性传感器的比例因子误 差造成的测量误差时非常方便。如果对角阵对角元素都是非零值,则对角阵的逆矩阵计 算非常简单

$$\left[\operatorname{diag}\left(\mathbf{v}\right)\right]^{-1} = \operatorname{diag}\left(\left[1/v_{1}, \cdots 1/v_{n}\right]^{\top}\right)$$
(2.34)

正交矩阵 (orthogonal matrix)

如果矩阵的行向量和列向量分别都是标准正交的,则称该矩阵是正交矩阵。即

$$\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{I} \tag{2.35}$$

这意味着

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\top} \tag{2.36}$$

根据上述定义易知,正交矩阵的行向量和列向量都是单位向量,即模长都等于 1。 容易证明正交矩阵的行列式为 ±1,但本书只取行列式为 1 的情形。第6章6.2.2.2小节介 绍的姿态矩阵(又称方向余弦矩阵)都是行列式为 1 的三维正交矩阵³,在惯性导航算 法中占据重要地位。

³行列式为 -1 的三维正交矩阵对应瑕变换,即一次旋转加一次反射[3]。

反对称矩阵 (skew symmetric matrix)

反对称矩阵是专门针对三维向量而定义的,与向量互为唯一映射,见式 (2.16),因此一个向量的反对称矩阵可以看作是该向量的另一种表达形式,在惯导算法中会被频繁使用。容易证明,反对称矩阵的转置等于矩阵反号,即

$$\left(\mathbf{v}^{\mathrm{p}}\times\right)^{\top} = -\left(\mathbf{v}^{\mathrm{p}}\times\right) \tag{2.37}$$

反对称矩阵 (**v**^p×) 的幂方满足

$$(\mathbf{v}^{\mathrm{p}} \times)^{\mathrm{n}} = \begin{cases} (-1)^{(\mathrm{n}-1)/2} \|\mathbf{v}\|^{\mathrm{n}-1} (\mathbf{v}^{\mathrm{p}} \times), & \mathrm{n} = 1, 3, 5, \cdots \\ (-1)^{(\mathrm{n}-2)/2} \|\mathbf{v}\|^{\mathrm{n}-2} (\mathbf{v}^{\mathrm{p}} \times)^{2}, & \mathrm{n} = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$
(2.38)

反对称矩阵的矩阵指数函数 e^(v×) 的求解公式为

$$e^{(\mathbf{v}^{p}\times)} = \mathbf{I}_{3} + \frac{\sin \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} (\mathbf{v}^{p}\times) + \frac{1 - \cos \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^{2}} (\mathbf{v}^{p}\times)^{2}$$
(2.39)

对于任意三维向量 a、b 和 c, 有

$$[(\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times \mathbf{b}^{\mathrm{p}}) \times] = (\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times) (\mathbf{b}^{\mathrm{p}} \times) - (\mathbf{b}^{\mathrm{p}} \times) (\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times)$$
(2.40)

$$\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times (\mathbf{b}^{\mathrm{p}} \times \mathbf{c}^{\mathrm{p}}) = (\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times) \left[(\mathbf{b}^{\mathrm{p}} \times) \, \mathbf{c}^{\mathrm{p}} \right] = \left[(\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times) \, (\mathbf{b}^{\mathrm{p}} \times) \right] \mathbf{c}^{\mathrm{p}} = (\mathbf{a}^{\mathrm{p}} \times) \, (\mathbf{b}^{\mathrm{p}} \times) \, \mathbf{c}^{\mathrm{p}}$$
(2.41)

2.1.4 向量和矩阵的微积分

导航解算关心的向量/矩阵的微积分运算包括:关于时间的导数、关于标量的导数、 关于向量的导数以及标量关于向量的导数等。

2.1.4.1 向量关于时间的导数

若向量 $\mathbf{a}(t)$ 是时间的函数,则 $\mathbf{a}(t)$ 对时间求导定义为

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}$$
(2.42)

因为向量既有大小又有方向,当它们中的任何一个发生变化时,向量也会随之改 变。因此,向量的时间导数等于大小和方向变化的总和。上述导数的一般表达式为[4]

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{constant direction}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$
(2.43)

式中, ω 是向量 a 绕旋转轴 C – C 的转动角速度。 $\omega \times a$ 的方向为与向量 a 箭头轨迹 的切线方向,其大小为 $\|\mathbf{a}\| \|\omega\| \theta$,其中 θ 是 a 与 ω 的夹角,如图2.4所示。



图 2.4 向量的方向变化

对于任意时变向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} (时间 t 的函数)、常向量 \mathbf{k} 、任意标量 α 和可导标量函数 f, 向量函数的时间导数满足以下定律 (相关证明见[5, p.756]):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{k} = \mathbf{0} \tag{2.44a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[\alpha(t) \mathbf{a}(t) \right] = \dot{\alpha}(t) \mathbf{a}(t) + \alpha(t) \dot{\mathbf{a}}(t)$$
(2.44b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[f(t)\mathbf{a}(t) \right] = \dot{f}(t)\mathbf{a}(t) + f(t)\dot{\mathbf{a}}(t)$$
(2.44c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t) \right] = \dot{\mathbf{a}}(t) \pm \dot{\mathbf{b}}(t)$$
(2.44d)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) \right] = \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{b}}(t)$$
(2.44e)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t) \right] = \dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t)$$
(2.44f)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[\mathbf{a}(f(t)) \right] = \dot{f}(t) \dot{\mathbf{a}}(f(t)) \tag{2.44g}$$

惯性导航解算中,用三维向量来表示位置和速度,在惯性导航算法中涉及三维向 量关于时间的导数(例如第6章6.3节速度微分方程的推导),且在速度和姿态积分运算 中涉及时变向量的积分。这些环节都应该注意这些向量既有大小又有方向的变化(如 第6章6.2.4.4小节中等效旋转矢量微分方程的求解和第6章6.3.3小节的速度积分运算), 而方向的变化往往是算法设计的关键环节。

2.1.4.2 向量/矩阵关于标量的导数

向量(或矩阵)关于一个标量的导数(例如时间 t)仍然是一个相同维度的向量(或 矩阵),其每个元素等于该位置原始值关于该标量的导数

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_2}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$
(2.45)

2.1.4.3 标量关于向量的导数

标量关于向量的导数,等于标量依次对向量各元素求偏导数,即

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}^{\top}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix}$$
(2.46)

若标量 a 恰好被定义为向量点积形式:

$$\mathbf{a} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{p}})^{\top} \mathbf{x}^{\mathrm{p}} = \mathbf{y}_{1}\mathbf{x}_{1} + \mathbf{y}_{2}\mathbf{x}_{2} + \dots + \mathbf{y}_{n}\mathbf{x}_{n}$$
(2.47)

则根据以上定义,其关于向量 x 的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}^{\top}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \mathbf{y}^{\top}$$
(2.48)

2.1.4.4 向量关于另一个向量的导数

向量 y 关于另一个向量 x 的导数被定义为一个矩阵, 其每一行等于向量 y 对应次 序元素关于向量 x 的导数:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^{\top}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$
(2.49)

若向量 y 恰好被定义为向量 x 左乘矩阵的形式:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$
(2.50)

则根据以上定义,其关于向量 x 的导数为:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^{\top}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$
(2.51)

2.1.4.5 向量/矩阵对标量的积分

向量(或矩阵)对标量的积分仍然是相同维度的向量(或矩阵),其每个元素等于 向量(或矩阵)该位置原始元素对该标量的积分值:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{A}(t) dt = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} a_{11}(t) dt & \int_{t_0}^{t_1} a_{12}(t) dt & \cdots & \int_{t_0}^{t_1} a_{1n}(t) dt \\ \int_{t_0}^{t_1} a_{12}(t) dt & \int_{t_0}^{t_1} a_{22}(t) dt & \cdots & \int_{t_0}^{t_1} a_{2n}(t) dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} a_{m1}(t) dt & \int_{t_0}^{t_1} a_{m2}(t) dt & \cdots & \int_{t_0}^{t_1} a_{mn}(t) dt \end{bmatrix}$$
(2.52)

2.1.5 线性化方法

惯性导航参数的微分方程一般是非线性的,而采用卡尔曼滤波进行组合导航数据 处理时,通常需要线性的误差方程。在此,有必要介绍非线性方程进行线性化的一般方 法。

考虑目标导航状态 x (向量)的非线性微分方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = f\left(\mathbf{x}, \mathbf{t}\right) \tag{2.53}$$

式中,t表示时间; $\dot{\mathbf{x}}$ 表示 \mathbf{x} 对时间的导数。假设已知标称状态 \mathbf{x}_0 满足该方程,在其基础上进行扰动分析,也即定义一个相对于标称状态的误差偏移量 $\delta \mathbf{x}$,此时可以将实时状态写为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x} \tag{2.54}$$

将其代入原始微分方程 (2.53),得

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \delta \dot{\mathbf{x}} = f\left(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, \mathbf{t}\right) \tag{2.55}$$

在标称状态处对其进行一阶泰勒展开,得

$$f(\mathbf{x}_{0} + \delta \mathbf{x}, \mathbf{t}) = f(\mathbf{x}_{0}, \mathbf{t}) + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{0}} \delta \mathbf{x} + \text{HOT}$$
(2.56)

其中, HOT 表示高阶项, 忽略高阶项, 式(2.56)近似为

$$\dot{\mathbf{x}}_{0} + \delta \dot{\mathbf{x}} \approx f(\mathbf{x}_{0}, \mathbf{t}) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{0}} \delta \mathbf{x}$$
 (2.57)

另外,标称状态 x₀显然也满足原始微分方程 (2.53):

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = f\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}\right) \tag{2.58}$$

将式 (2.57) 和式 (2.58) 相减,得

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial f\left(\mathbf{x}, \mathbf{t}\right)}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{0}} \delta \mathbf{x}$$
(2.59)

以上内容即为第7章7.2节所谓的扰动分析方法。这个公式中只保留了泰勒级数的一 阶项,获得了扰动误差与其微分的近似线性关系,在后续卡尔曼滤波公式推导时可用于 获取状态转移矩阵。在时间步长足够短时,可以忽略误差状态变化的高阶项,再次进行 一阶泰勒展开,将连续时间误差方程进行离散化:

$$\delta \mathbf{x} \left(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t} \right) \approx \delta \mathbf{x} \left(\mathbf{t} \right) + \delta \dot{\mathbf{x}} \left(\mathbf{t} \right) \Delta \mathbf{t} = \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \Delta \mathbf{t} \right) \delta \mathbf{x} \left(\mathbf{t} \right)$$
(2.60)

将括号中的系数矩阵定义为状态转移矩阵,记为

$$\delta \mathbf{x} \left(t + \Delta t \right) = \mathbf{\Phi}_{t + \Delta t} \delta \mathbf{x} \left(t \right)$$
(2.61)

其中

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}} = \left(\mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \Delta\mathrm{t}\right) \tag{2.62}$$

将其中偏导数矩阵记为 F 阵, 又可写为:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{\top}} \tag{2.63}$$

$$\mathbf{\Phi}_{t+\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{F} \Delta t \tag{2.64}$$

更严谨的推导表明:线性时不变系统的状态转移矩阵微分是一个矩阵指数函数,上 式结果只是该指数函数展开的一阶截断:

$$\boldsymbol{\Phi}_{t+\Delta t} = e^{\mathbf{F}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t + \mathbf{F}^2 \frac{\Delta t^2}{2!} + \mathbf{F}^3 \frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots$$
(2.65)

2.2 坐标系

描述物体的运动需要先定义参考坐标系,惯性导航过程涉及多个坐标系,包括惯性 坐标系、地心地固坐标系、导航坐标系、传感器坐标系、载体坐标系等。本书采用三维 笛卡尔右手坐标系,即坐标系的3个坐标轴相互正交,且遵循右手法则,即 x 轴正方 向与 y 轴正方向上的单位向量叉乘的结果指向 z 轴正方向。本节所用地球椭球概念将 在2.3节介绍。

2.2.1 地心惯性坐标系

惯性坐标系是牛顿力学成立的没有加速度或旋转的理想坐标系。定义一个绝对的 惯性坐标系是很困难的,且对于惯性导航来说也是没有必要的。为此,通常采用近似的 地心惯性坐标系 (earth-centered inertial frame, ECI),简称 i 系,定义如图2.5所示。

- 原点位于地球的质心;
- z 轴大致沿地球自转轴方向,从地心指向协议北极点;
- x 轴在赤道平面内,从地心指向春分点;
- y 轴在赤道平面内与 x、z 轴构成右手坐标系。



图 2.5 地心惯性坐标系(ECI系或 i 系)

注意,地心惯性坐标系不随地球旋转。对于空间定位导航应用来说,例如 GNSS 卫 星定轨,明确指定 i 系的 x 轴和 y 轴的指向非常重要。而对于惯性导航来说,重要的 是 i 系的原点位于地心且坐标轴不随地球一起旋转, x 和 y 轴的具体指向则没有那么重 要。在惯性导航中,惯性传感器测量值的参考系是惯性坐标系。严格来讲,地心惯性坐 标系并不是真正的惯性坐标系,因为地心在围绕太阳公转的轨道上具有加速度,且地球 自转轴在缓慢移动,同时整个银河系也在旋转。然而,对于以地球为参考的惯性导航来 说,ECI 是惯性坐标系的一个足够精确的近似。

2.2.2 地心地固坐标系

地心地固坐标系 (earth-centered earth-fixed frame, ECEF),又称地球坐标系,简称 e 系,是固联在地球上,并随地球自转而转动的旋转坐标系,如图2.6所示。

- 原点位于地球的质心;
- z 轴大致沿地球自转轴方向,从地心指向协议北极点;
- x 轴位于赤道平面,从地心指向赤道与本初子午线(见本章2.3.2.1小节)的交点;
- y 轴位于赤道平面, 与 x、z 轴构成右手坐标系。

由于 e 系与地球固联,对于描述地球附近空间物体相对于地球或地面的位置、速度和加速度等参数非常方便。e 系与 i 系的原点相同,z 轴重合,但其 x 轴和 y 轴存在空间指向差异,该差异是由地球自转造成的。



图 2.6 地心地固坐标系 (ECEF 或 e 系)

2.2.3 导航坐标系

导航坐标系 (navigation frame), 简称 n 系。n 系的原点位于导航载体上, 并与载体 一起运动, 其轴系的定义有多种选择⁴, 本书选用"北-东-地 (N-E-D)"形式, 如图2.7所 示。定义如下:

- 原点为导航对象上的某一参考点,如导航系统测量中心或载体质心;
- z 轴,即地向轴(D)沿着参考椭球(定义见本章2.3.1节)的法线方向向下,由 原点大致指向地心;
- x 轴, 即北向轴 (N), 位于垂直于 z 轴的椭球切平面内, 沿子午线方向指向北极;
- y 轴,即东向轴(E),位于垂直于 z 轴的椭球切平面内,指向东方向,与 x、z 轴构成右手坐标系。



图 2.7 导航坐标系

⁴常用的选择还包括"东-北-天(E-N-U)"形式,这些选择都是完全等价的。

注意,除了在地球南北极和赤道外,n系的z轴不通过参考椭球中心(即地心)。n 系的z轴也不是与当地铅垂线严格平行,二者之间的差异称作垂线偏差。同样,将n系 称作当地水平坐标系也是一种足够精确的近似,因为其x轴和y轴并不是位于真正的 水平面上。然而,一般情况下这一差异足够小,在惯性导航应用中可忽略其影响,只有 针对高精度纯惯导应用或高海拔导航时才需要做适当的补偿,详见2.3.4.2节的讨论。

n 系对于描述姿态非常方便,常作为载体姿态的参考基准,因为导航通常关心载体 相对于北向、东向和地向的朝向关系,n 系的轴向总是与当地水平方向对齐。n 系通常 不用于表示载体位置的坐标,因为地心位置向量(见2.3.2节)在此坐标系下几乎仅投影 在 z 轴。但是 n 系用作位置误差向量和载体速度向量的投影坐标系则又非常直观方便。

然而,n系在地球两极地区存在奇异性,因为北极和南极没有明确的东向和北向定 义。因此,在n系下实现的惯性导航算法不适合在地球两极地区附近使用,应该使用其 他坐标系进行导航解算,如 e 系,或对 n 系做一定调整变为游移方位坐标系 (wander azimuth frame,详见[1, p.21])。

在惯性导航解算中使用 n 系需要注意以下问题: 当 n 系的原点随着载体运动而发 生改变后,其坐标轴相对于 e 系或 i 系来说在空间中的指向也发生了改变,如图2.8所示。 这是因为地球表面是曲面,载体沿着椭球面不管朝哪个方向运动,其轨迹都是一段弧 线。n 系坐标轴在空间中的上述角度变化对时间求导的结果称作位移角速度(transport rate 或 craft rate),记作 ω_{en} ,因为该角速度是由载体运动产生的位移所导致的。关于 位移角速度的详细解释和推导见第3章3.5.3.1小节。



图 2.8 n 系坐标轴的朝向随原点的改变而变化

2.2.4 载体坐标系

载体是指搭载惯性导航系统和其他导航传感器的载具,如飞机和汽车等。载体坐标 系 (vehicle-fixed body frame),简称 v 系,是与载体固联的坐标系,并与载体一起运动,

其轴系的定义有多种选择⁵,本书选用"前-右-下(F-R-D)"的形式,如图2.9所示,定 义如下:

- 原点位于载体的导航参考点,如导航系统的测量中心,通常设置与 n 系的原点 一致以简化运动方程的推导和计算;
- x 轴指向载体的前向(如沿飞机的纵轴向前),也称横滚轴;
- y 轴指向右向(如沿飞机的横轴向右),也称俯仰轴;
- z 轴与 x、y 轴垂直构成右手坐标系, 指向地向, 也称航向轴。



图 2.9 载体坐标系 (v 系)

载体坐标系各轴都是有实际意义的物理轴,是载体姿态定义的参考,只有明确定义 了 v 系,描述载体的姿态才有意义,详见第6章6.2.1.2小节。

2.2.5 传感器坐标系

传感器坐标系 (sensor-fixed body frame), 简称 b 系, 原点为惯性测量单元 (inertial measurement unit, IMU, 见第3章3.4节) 的测量中心, 三个坐标轴分别指向加速度计和 陀螺的敏感轴正方向, 如图2.10所示。在捷联惯性导航系统中, 加速度计和陀螺的比力 和角速度测量值均是在 b 系下输出。在此, 假设三轴加速度计分别与三轴陀螺对齐安 装, 且相互垂直。**除非特别说明, 后续章节假定** b **系与** v **系重合⁶,例如将载体系简写 为** b **系**。实际上, v 系和 b 系可能存在位置和角度的安装偏差, 在车载组合导航解算 中, 如果使用车辆运动约束, 则有必要严格区分 b 系与 v 系。

2.3 地球椭球模型

对于地球附近空间的惯性导航系统,在导航解算时需要从加速度计的比力测量值 中补偿地球的重力加速度,才能得到所需的运动加速度,为此需要引入地球重力场等概

⁵常用的选择还包括"右-前-上(R-F-U)"形式,这些选择都是完全等价的。一般情况下,为姿态表达和计算的方便,N-E-D形式的 n 系通常与 F-R-D形式的 v 系配合使用,而 E-N-U形式的 n 系则常与 R-F-U形式的 v 系配合使用。

⁶实际上不可能完全重合,但是其偏差一般可以事先标定。



图 2.10 传感器坐标系 (b 系)

念,知道如何计算重力加速度。为了将惯性参考系的角速度测量值转换到地球参考系, 还需要精确定义地球自转角速度;为了描述载体相对于地球表面的位置,需要先定义一 个参考的地球表面,并定义坐标系统。这都要求首先建立一个地球的参考模型作为基 准。此外,为了将速度积分得到位置变化,还需要知道如何计算地球参考模型表面和外 部点的曲率和曲率半径。本节逐一介绍解答上述问题所需的大地测量学基础知识。

2.3.1 参考椭球

地球表面的形状是一个非常复杂的物理面,无法用数学曲面精确描述。实际上,对 于惯性导航来说也没必要这样做,因为地球体积很大,地表的凹凸不平的幅度与地球半 径相比是微不足道的。大地测量领域引入大地测量地球模型作为真实地球的一个近似, 并将其用作描述地球表面和外部重力场的基准,称之为地球参考椭球模型。参考椭球模 型的选择和定义应满足两个基本要求[6, p.91]: (1) 它应该是大地水准面和地球重力场 的近似,从而允许对非线性的大地测量问题进行线性化。(2) 该模型在数学上应该简单, 能够实现严格的解析计算。参考椭球模型作为基准,应适用于大地测量、导航、地理信 息和制图,也应适用于天文学和地球物理。基于上述考虑,旋转椭球被引入作为大地测 量的参考椭球模型。

2.3.1.1 旋转椭球参数

旋转椭球是通过子午圈椭圆绕其短半轴旋转生成的,呈现出关于地球南北极轴的 旋转对称性和关于赤道平面的镜像对称性,如图2.11所示。因此,椭球的大小和形状由 子午圈椭圆的两个几何参数描述:

- 椭球长半轴 a, 也称赤道半径, 指地心到赤道上任一点的距离, 也是地心到地球 表面的最远距离。
- **椭球短半轴** b, 也称极轴半径, 指地心到任一南北极点的距离, 也是地心到地球 表面的最近距离。



图 2.11 旋转椭球模型示意图

除了直接用长短轴半径,地球椭球模型通常还可以由椭球长半轴 a,结合几何扁率 f 或偏心率 e 来定义。其中几何扁率 f 定义为

$$f = \frac{a - b}{a} \tag{2.66}$$

扁率 f 量化了椭球在极点方向的压缩程度。当 f 趋近 0 时, 椭球接近于一个完美的 球体; 当 f 增加时, 椭球的极点压缩程度也增加。第一偏心率 e 和第二偏心率 e' 定义为

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$
 (2.67)

上述参数满足以下关系:

$$\frac{b}{a} = 1 - f = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{e}{e'}$$
(2.68)

在使用旋转椭球之前,先明确参考椭球中的几个专用概念。如图2.11所示,图中 NS 为旋转椭球的旋转轴,也就是地球参考椭球模型的极轴。包含旋转轴的平面与椭球表面 相截得到的椭圆称为**子午圈**(或经度圈),包含子午圈的平面称为**子午面**,子午圈被极 点分为两段曲线,称为子午线,也叫经线。垂直于旋转轴的平面与椭球面相截得到的圆 称为**纬圈**(或平行圈),其中通过椭球中心的平行圈是最大的,称为**赤道**。包含椭球表 面点 P 处的法线且与该点子午面垂直的平面与椭球面相截,得到的闭合圈称为**卯酉圈**。

2.3.1.2 常用的参考椭球模型

目前,常用的地球参考椭球模型有:1980年国际大地测量参考系统椭球(GRS80)、 1984年世界大地测量系统椭球(WGS84),以及我国2000国家大地坐标系椭球(CGCS2000)。 其中CGCS2000是我国当前最新的国家大地坐标系,其椭球模型以世界大地参考坐标 系97(ITRF97)参考框架为基准,通过我国境内全球定位系统(global positioning system, GPS)连续运行基准站、空间大地控制网以及天文大地网联合平差建立。上述三个 椭球模型的基本参数及其导出参数列于表2.1中,对于惯性导航系统来说,它们之间的 差异可以忽略不计[7, p.40]。

	WGS 84	GRS 80	CGCS 2000
长半轴 a(m)	6378137.0	6378137.0	6378137.0
扁率 f	1/298.257223563	1/298.257222101	1/298.257222101
短半轴 b(m)	6356752.3142	6356752.3141	6356752.3141
第一偏心率 e	0.081819190842621	0.081819191042816	0.081819191042816
第二偏心率 e'	0.082094437949696	0.082094438151917	0.082094438151917
动力形状因子	1 000600001010 \(10-3)	1.09962×10^{-3}	1 000600020050 ~ 10-3
J_2	1.082029821313×10 °	1.08203 × 10	1.082029852258 × 10
地心引力常数	$2.086004418 \times 10^{14}$	3.086005×10^{14}	$2.086004418 \times 10^{14}$
$\mathrm{GM}(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2)$	5.980004418 × 10	5.960005 × 10	5.960004416 × 10
地球自转角速	7.202115×10^{-5}	7.902115×10^{-5}	7.202115×10^{-5}
率 $\omega_{\rm e} ({\rm rad/s})$	(.292113 × 10	1.292113 × 10 1.292113 × 10	(.292113 × 10

表 2.1 常用椭球模型基本参数[8,9,10]

2.3.1.3 地球自转角速度

在惯性坐标系下,地球绕自身的地轴自转,并绕太阳公转。太阳在惯性系中不是恒 定不变的,但它的旋转影响是可以忽略不计的。地球相对于惯性空间的自转周期称为一 个恒星日,约为 23 小时 56 分钟 4 秒。地球自转的角速率不是严格恒定的,受到许多 因素的影响,但其改变量并不大,在导航领域中一般忽略其变化,将地球自转假设为一 个恒定的角速度向量 ω_{ie} ,其模值 ω_{e} 在正常椭球模型中进行定义,常见值为

 $\omega_{\rm e} \approx 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ $\approx 15.0410669^{\circ}/\text{h}$

如图2.12所示,地球自转角速度向量在 i 系或 e 系中的投影为

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i} = \boldsymbol{\omega}_{ie}^{e} = \begin{bmatrix} 0\\0\\\omega_{e} \end{bmatrix}$$
(2.69)

在n系中的投影为

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \begin{bmatrix} \omega_{e} \cos \varphi \\ 0 \\ -\omega_{e} \sin \varphi \end{bmatrix}$$
(2.70)



图 2.12 地球自转角速度向量在 e 系和 n 系下的投影

2.3.2 地心位置向量

在地球附近空间的导航,常采用地心位置向量来描述载体相对地球的位置,该向量 从地心指向载体目标点(如载体质心或载体上的其他参考点),记为 **r**_{eb}。导航解算过程 需要坐标来表示该向量以便做数学计算。常用的地心位置向量的坐标形式有两种:**笛卡 尔直角坐标**和**大地坐标**。

2.3.2.1 直角坐标和大地坐标

直角坐标是地心位置向量在地心地固坐标系中的投影,记作

$$\mathbf{r}_{eb}^{e} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

如果载体位于参考椭球的表面,则其笛卡尔直角坐标满足

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$
(2.71)

大地坐标(geodetic coordinates)又称球面坐标或曲线坐标,即大地纬度、经度和 椭球高。大地坐标比直角坐标更加直观,经常用作导航系统的位置输出形式。

大地纬度 (geodetic latitude),又称地理纬度,是目标点 P 处法线⁷与赤道平面的 夹角,如图2.11所示,用希腊字母 *φ* 表示。如果 P 点不在椭球表面上,则其纬度由经过 该点的法线与参考椭球体表面交点 S (如图2.13所示)的纬度给出。需要注意的是,大 地纬度是以参考椭球体和法线为基准定义的,地球是一个不规则球体,如果采用其他的 垂线作为基准,还有地心纬度、天文纬度和引力纬度等不同形式的纬度定义。惯性导航 计算出的纬度是大地纬度,而不是地心纬度。在本书后续章节中,若非特别说明,所述 纬度均指大地纬度。纬度取值范围为 –90°~+90°,以北半球为正,南半球为负。

⁷注意,一般情况下 P 点的法线不经过参考椭球的中心,南北极除外。


图 2.13 大地纬度和大地高

经度 (longitude), 记作 λ, 是目标点 P 所在的子午面与本初子午线 (即经过英 国伦敦格林尼治天文台的协议零度子午线)所在子午面在赤道面上的夹角, 如图2.11所 示。与纬度不同, 经度是一种人为定义的量, 而不是实际的物理量。经度取值范围是 –180°~+180°, 约定本初子午线东面经度为正, 西面经度为负, 或者取值 0°~360°。 需要注意的是, 经度在地球两极存在奇异, 因为在极点无法定义经度。

大地高 (geodetic height),又称椭球高,记作 h,是从目标点 P 出发沿着椭球法线 方向到椭球表面的距离,如图2.13所示。当载体在椭球面以外时记为正,载体位于参考 椭球表面时大地高为零。大地高是以参考椭球和椭球法线为基准定义的,在大地测量领 域常用的高程系统还包括:以大地水准面为基准的正高和以似大地水准面为基准的正 常高。**若无特别说明,后续章节所述高程均指椭球高**。载体的地心位置向量的大地坐标 形式记作 **p**,以便与 **r**_{eb} 区分开来

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}$$
(2.72)

2.3.2.2 大地坐标与直角坐标变换

地心位置向量的大地坐标与笛卡尔直角坐标之间可相互转换。其中,大地坐标转换 为直角坐标可采用以下计算公式:

$$\begin{cases} X = (R_N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = (R_N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = [(1 - e^2) R_N + h] \sin \varphi \end{cases}$$
(2.73)

式中, R_N 为卯酉圈半径, e 为参考椭球的第一偏心率。由直角坐标计算大地坐标相对 复杂一些, 计算公式如下:

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{Z(R_{N} + h)}{\sqrt{X^{2} + Y^{2}}[(1 - e^{2})R_{N} + h]} \\ \lambda = \arctan \frac{Y}{X} \\ h = \frac{\sqrt{X^{2} + Y^{2}}}{\cos \varphi} - R_{N} \end{cases}$$
(2.74)

上式需要使用四象限反正切函数计算经度 λ 。由于卯酉圈半径 R_N 是纬度的函数,因此纬度和高程的计算需要迭代。在多数情况下,迭代算法具有很好的收敛特性,纬度经过两次迭代即可收敛到 10⁻³角秒以内。在地球两极地区,高程的计算将出现奇异,需要对上述算法进行改进,详见[2, p.62]

2.3.3 参考椭球表面的曲率半径

惯性导航解算过程中,涉及根据载体的速度来计算对应的经度和纬度的变化(即位 置变化),因此需要曲率半径参数。参考椭球是一个旋转椭球,其表面不同位置对应的 曲率半径是不同的,并且同一位置不同方向(如朝东方向和朝北方向)上的曲率半径也 不一样。

在子午圈平面内,参考椭球面上某点 P 沿其所在的子午线方向(向北或向南)运动,其轨迹对应的曲率半径称为子午圈半径,记作 R_M,如图2.14所示。它是指与 P 点所在的子午圈椭圆局部最佳匹配的圆的半径,该圆位于 P 点北向和地向构成的子午圈平面内。



图 2.14 旋转椭球的曲率半径(根据参考文献[6, p.94]重绘)

R_M的计算公式为

$$R_{M}(\varphi) = \frac{a(1 - e^{2})}{(1 - e^{2}\sin^{2}\varphi)^{3/2}}$$
(2.75)

式中, *φ* 为纬度, a 为椭球长半轴, e 为椭球第一偏心率。可见, 子午圈半径是纬度的 函数, 在赤道上取得最小值, 在极点处曲率半径最大。

包含 P 点(目标点)法线且与 P 点所在子午圈平面垂直的平面称为卯酉圈平面, 也称主垂向平面 (prime vertical plane)。在卯酉圈平面内,参考椭球面上的点 P 沿东 西方向运动对应的曲率半径称作卯酉圈半径,又称横向曲率半径或主曲线曲率半径,记 作 R_N ,计算公式为

$$R_{N}(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^{2}\sin^{2}\varphi}}$$
(2.76)

注意,卯酉圈曲率半径不是 P 点所在纬圈的半径。R_N 随纬度变化而改变,并在赤 道上取得最小值,在极点取得最大值。R_N 也等于椭球表面一点到极轴的法线的长度,如 图2.14所示。

子午圈半径和卯酉圈半径分别是椭球面上 P 点沿北向和东向运动对应的曲率半径。 如果 P 点沿任意方向运动,假设其大地方位角(运动方向与所在子午线北向的夹角)为 ψ ,则该方向对应的曲率半径 R_{ψ} ([6, p.95])为

$$R_{\psi} = \left(\frac{\cos^2\psi}{R_M} + \frac{\sin^2\psi}{R_N}\right)^{-1}$$
(2.77)

可见式 (2.75) 和式 (2.76) 是式 (2.77) 的特例。如2.3.1.1节所述, 纬圈是圆形, 其半径 (记作 p(φ), 如图2.14所示) 与卯酉圈半径 R_N 之间有如下转换关系:

$$p(\varphi) = R_N \cos \varphi \tag{2.78}$$

将目标点从椭球表面拓展到椭球外部高度(椭球高)为h的点 P 处(如图2.13所示), 对应的子午圈半径和卯酉圈半径分别为 R_M +h和 R_N +h,纬度圈半径为(R_N +h) $\cos\varphi$, 其中 R_M 和 R_N 为过 P 点的法线与椭球面的交点(如图2.13中的 S 点)处的子午圈和 卯酉圈半径。

载体在地球表面附近运动时,其速度与大地坐标的时间导数之间的关系为

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{v_{N}}{R_{M} + h} \\ \dot{\lambda} = \frac{v_{E}}{(R_{N} + h)\cos\varphi} \\ \dot{h} = -v_{D} \end{cases}$$
(2.79)

式中, v_N、v_E和 v_D分别是载体相对于地球的速度(简称地速)向量在当前位置点的北向、东向和地向的投影分量。通过观察图2.14很容易推导出式(2.79),本书将在第3章3.5.3.1小节中推导。

2.3.4 地球的正常重力场

根据牛顿万有引力定律,地球表面附近任一质点都受到地球引力作用,同时由于跟随地球自转,还会受到离心力的作用。除此之外,物体还受到月亮和太阳等其他天体的吸引,只不过它们与地球引力相比,小到可以忽略不计或被地球公转的离心力平衡。地球引力与离心力的合力称为地球重力。另外一种理解方式是:将引力分解为重力和向心力,其中向心力与离心力大小相等,方向相反。

地球万有引力导致的加速度称作引力加速度,记作 g;重力导致的加速度称作重力加速度,用 g_p 表示⁸,离心力导致的加速度为 $-\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}_{eb})$ 。位于参考椭球表面的物体所受的加速度如图2.15所示,并满足以下关系:



$$\mathbf{g}_{\mathrm{p}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{eb}})$$
(2.80)

图 2.15 地球引力加速度、重力加速度与向心加速度

在地球附近的任意位置,离心加速度都可以根据位置精确计算,而引力加速度的计 算则复杂得多,因为不能准确知道地球的实际形状和质量分布,因此重力加速度也无法 直接准确地计算出来。为此,工程上引入与之近似的**正常重力模型**。正常重力可基于地 球正常椭球模型,不必涉及地球形状和质量密度即可直接计算得到。正常重力与实际地 球重力之间的差异称作重力异常,主要由地球内部的质量分布不均匀引起。

将地球附近的引力场与离心力场叠加,形成重力的等势面,并对其进行近似,使其 对应一个规则的椭球体,将这个椭球体称为正常椭球,相应的重力场称为正常重力场, 正常重力加速度定义为正常重力势的梯度。建立正常椭球通常需要 4 个参数:(1) 椭 球长半轴 a;(2) 与形状相关的参数,即动力形状因子 J₂ 或扁率 f;(3) 物理尺度参数 GM,即包括大气层在内的地球总质量乘以牛顿引力常数;(4)地球自转角速率 ω_e。通 过这四个参数还可以推导出椭球的短半轴 b,因此定义正常重力椭球的同时也定义了几

⁸下标 p 表示铅垂方向,即 plumb 的首字母。

何椭球。基于上述四个参数, 椭球外任何地方的正常重力势或与正常势相关的任何量都可完全明确定义[11, p.213]。常用椭球的正常重力参数已在表2.1中列出。

2.3.4.1 正常重力

正常椭球体表面上的各点处正常重力向量垂直于标准椭球面,与该点法线方向一致。椭球面上的正常重力加速度大小由 Somigliana 公式给出[6, p.102]:

$$g(\varphi) = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$
(2.81)

式中, a, b 分别为椭球体的长半轴和短半轴, φ 为待求点的纬度, γ_a 和 γ_b 分别为赤道 和极点处的正常重力值。b、f、 γ_a 和 γ_b 可以通过正常椭球的四个基本常数严格推导出 来。对于 GRS80 椭球的导出参数为

$$\begin{cases} b = 6356752.31414m \\ \gamma_a = 9.7803267715m/s^2 \\ \gamma_b = 9.8321863685m/s^2 \\ f = 1/298.257222101 \end{cases}$$

式 (2.81) 是正常重力的精确公式, 它只适用于椭球体表面点的正常重力计算。对于 椭球体上方椭球高为 h 处的点, 可采用以下近似公式:

$$g(h,\varphi) = g(\varphi) \left[1 - \frac{2}{a} \left(1 + f + m - 2f\sin^2\varphi \right)h + \frac{3}{a^2}h^2 \right]$$
(2.82)

式中,f为椭球扁率,m的计算公式如下:

$$m = \frac{\omega_e^2 a^2 b}{GM} \tag{2.83}$$

椭球面上的正常重力加速度向量 $\mathbf{g}_{\mathbf{b}}^{n}$ 与参考椭球面处处垂直,在 n 系的投影分量为

$$\mathbf{g}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ g\left(\mathbf{h},\varphi\right) \end{bmatrix}$$
(2.84)

已知正常椭球的基本参数,则可以根据式 (2.81)严格计算椭球表面任一点的正常 重力。式 (2.81) 也可以展开为以下近似的级数形式[6, p.110]:

$$g(\varphi) = \gamma_{a} \begin{pmatrix} 1 + 0.0052790414 \sin^{2} \varphi + 0.0000232718 \sin^{4} \varphi \\ + 0.0000001262 \sin^{6} \varphi + 0.000000007 \sin^{8} \varphi \end{pmatrix}$$
(2.85)

上述展开式的精度相比于式 (2.81) 的严格计算值的误差约为 10⁻³μm/s², 可忽略 不计。如果把 GRS80 的椭球参数代入式 (2.82) 和式 (2.83) 计算其系数, 可得 GRS80 模型任意点处的正常重力计算式

$$g(\varphi, h) = g(\varphi) - (3.0877 \times 10^{-3} - 4.3 \times 10^{-6} \sin^2 \varphi)h + 0.72 \times 10^{-6} h^2$$
(2.86)

式中, $g(\varphi)$ 为对应的椭球表面 h=0 处的正常重力值,也即式 (2.85) 的结果, h **单位为** km, $g(\varphi, h)$ 的单位为 m/s²。

在工程应用中,常使用 (2.85) 和 (2.86) 来计算正常重力,然后代入式 (2.84) 得到 正常重力加速度向量在 n 系下的投影分量。

2.3.4.2 正常重力的精度

式 (2.82) 是一个精度很高的近似公式,在高度为 20 km 处,其误差大小不超过 1.45×10⁻⁶ m/s²,对于海拔较低的点误差更小⁹。然而,当海拔达到一定高度 (如 20 km 或更高)后,由于正常重力场的等势面并不平行,正常重力矢量与椭球体的法线不再完 全一致,在子午面内产生了一定的偏差角,称为垂线偏差。垂线偏差使得正常重力加速 度向量在 n 系北方向的投影量不再为零,其大小为

$$g_{p,N} \approx -8.08 \times 10^{-6} h_{km} \sin 2\varphi \ (m/s^2)$$
 (2.87)

例如,在武汉上空一点,纬度为北纬 30.5°,高程为 20km,该点处正常重力加速度 的北向分量约为 -1.4 × 10⁻⁴m/s²,即 14 mGal。该数值略小于导航级惯导的加速度计 零偏(见3.5.5节,表3.3)。因此,对于高精度的惯导系统来说,式 (2.84) 应修正如下:

$$\mathbf{g}_{p}^{n} = \begin{bmatrix} g_{p,N} \\ 0 \\ g(h,\varphi) \end{bmatrix}$$
(2.88)

但是高程越小,北向分量越小,在大多数情况下,将忽略这一影响,只有极高精度的惯导或在高海拔区域进行导航时,需要注意垂线偏差引起的重力补偿,详见参考文献[11, sec.6.6.1]。

此外,正常重力只是实际重力场的一个较为精确的近似。对于导航级及更高精度的 纯惯性导航来说,有必要更加细致地考虑重力异常等改正项。经验表明,应用高精度的 重力场模型可提升约 0.1 海里/h 的惯性导航精度[12, p.62]。

2.4 随机过程

惯性传感器的输出不可避免地包含随机误差成分,并随着导航解算的进行而逐渐 累积,使得位置、速度和姿态等导航参数不可避免地掺杂了随机性。这些误差的传播可 被视为一个由噪声和随机常数等误差推动的随机过程。因此,无法以确定性的方式来全 面描绘导航状态及其误差。在评估系统性能和设计导航算法的过程中,必须借助概率论 和统计学的手段,选取恰当的模型来刻画和预测系统动态。所选数学模型的恰当性取决 于惯性传感器随机误差特性,而非任意决定。这一切都建立在随机过程理论的基础之 上。本节介绍高斯分布、随机过程的基本概念以及常见的随机模型,并阐述它们与惯性 导航的关联性。对于概率论和随机过程的理论,读者可参考文献[13,14]深入学习。

⁹注意,这里是公式 (2.82) 的近似误差,而不是正常重力与实际重力之间的差异。

2.4.1 高斯分布

实数上最常用的分布是高斯分布(Gaussian distribution),也称正态分布(normal distribution)。如果一维随机变量 x 满足高斯分布,则其概率密度函数(probability density function, PDF)为

$$f\left(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu},\sigma^{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^{2}}{\sigma^{2}}\right)$$
(2.89)

式中, μ 为随机变量 x 的期望, σ^2 为方差 (variance), σ 为标准差 (standard deviation)。 $\mu \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \in (0,\infty)$ 两个参数完全决定了高斯分布的概率密度函数及各项概率属性。如 果标量随机变量 x 满足高斯分布,则称之为高斯变量,记作

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$
 (2.90)

高斯分布可以推广到 ℝⁿ 空间,一组高斯变量构成高斯随机向量,记作

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
(2.91)

其概率密度函数为

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}_{\mathrm{x}}) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{n}} \det(\mathbf{P}_{\mathrm{x}})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{x}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_{\mathrm{x}}^{-1} \left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{x}}\right)\right)$$
(2.92)

式中, μ_x 为随机向量的均值, $\mathbf{P}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是协方差矩阵。满足高斯分布的随机向量 x 记 作

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{x}}, \mathbf{P}_{\mathrm{x}}\right) \tag{2.93}$$

正态分布的随机变量经任意线性组合后仍符合正态分布,这一性质也可以扩展到 随机向量。假设有以下线性组合:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{c} \tag{2.94}$$

其中, A 和 B 是常值矩阵, c 是常值向量, x 和 y 是随机向量, 且满足:

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{x}}, \mathbf{P}_{\mathrm{x}}\right) , \mathbf{y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{y}}, \mathbf{P}_{\mathrm{y}}\right)$$
 (2.95)

则有

$$\mathbf{z} \sim \mathcal{N} \left(\mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{x}} + \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{y}} + \mathbf{c}, \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathrm{x}} \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{\mathrm{y}} \mathbf{B}^{\top} + \mathbf{A} \mathbf{P}_{\mathrm{x}, \mathrm{y}} \mathbf{B}^{\top} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{\mathrm{y}, \mathrm{x}} \mathbf{A}^{\top} \right)$$
(2.96)

式中, $\mathbf{P}_{x,y}$ 是随机向量 x 和 y 的互协方差矩阵, 且 $\mathbf{P}_{x,y} = \mathbf{P}_{y,x}^{\top}$ 。

高斯分布在惯性传感器误差建模和惯导误差传播分析中非常有用,例如通常认为 惯性传感器的高频随机噪声和惯导初始化误差符合高斯分布。式 (2.96) 对于惯性导航 状态的估计和分析很实用,如果已知惯导的初始误差符合高斯分布,而误差变量(如位 置、速度和姿态误差)随时间线性变换,则只需要确定后续某个时刻的均值和协方差, 即可完全确定误差变量在该时刻的概率分布。

2.4.2 随机过程

假设某个随机试验的样本空间为 $\Omega\{\omega\}$, T 是一个参数集, 如果对每一个样本 $\omega \in \Omega$ 总有一个确定的 t 的函数 X (t, ω) 与之对应, 这样对于所有的 $\omega \in \Omega$ 就得到一族 t 的函数, 称这族 t 的函数为一个随机过程 (stochastic process), 记作

$$\{X(t), t \in T\} \overrightarrow{u} X(t)$$

上述定义中的实数集合 T 称为随机过程 X(t) 的参数空间 (parameter space),通常 t 是时间的集合。从上述定义可将随机过程看做随机变量概念的推广:从 ω 与实数 的对应 (即随机变量)推广到与实函数的对应。因此,随机过程 X(t, ω) 是定义在 T 和 Ω 上的二元函数,为了简便,通常在书写时省去符号 Ω ,将其记为 X(t)。根据上述讨论,随机过程符号 X(t) 在不同的情况,有以下四种不同的意义:

- (1) 当 t 和 ω 均为变量时, X(t) 为 t 的函数族;
- (2) 当 t 为变量, ω 固定时, X(t) 为一个确定的实函数;
- (3) 当 t 固定, ω 为变量时, X(t) 为一个随机变量;
- (4) 当t固定, ω 固定时,X(t)为一个确定的实数。

2.4.2.1 相关函数与协方差函数

对于一个随机过程 X(t), 给定时刻 t_k , $X(t_k)$ 是一个随机变量,随机过程的自相关 函数定义为二阶矩:

$$R_{X}(t_{1}, t_{2}) = E[X(t_{1}) X(t_{2})]$$
(2.97)

其中, *E*() 表示求期望, t₁ 和 t₂ 是任意采样时刻, 自相关函数表示一个随机过程在两个时刻的相关程度。按期望的定义展开有:

$$R_{\rm X}({\rm t}_1,{\rm t}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} {\rm x}_1 {\rm x}_2 f({\rm x}_1,{\rm x}_2) \, {\rm d}{\rm x}_1 {\rm d}{\rm x}_2$$
(2.98)

若 X (t) 是平稳随机过程[13, p.65],则每个时刻的概率密度函数是相同的,自相关 函数值仅取决于两个时刻的时间差值 $\tau = t_2 - t_1$,函数 R_X 退化为单个变量 τ 的函数:

$$R_{\rm X}(\tau) = E\left[{\rm X}({\rm t})\,{\rm X}\,({\rm t}+\tau)\right] \tag{2.99}$$

自相关函数能够反映随机过程随时间的变化程度。两个随机过程之间的互相关函数定义为

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) Y(t_2)]$$
(2.100)

显然,自相关函数是互相关函数的特殊情况。与式 (2.99) 类似,当 X(t) 和 Y(t) 都是平稳随机过程时,其互相关函数仅与时间差有关:

$$R_{\rm XY}(\tau) = E\left[X\left(t\right)Y\left(t+\tau\right)\right] \tag{2.101}$$

如果交换下标顺序,则有

$$R_{\rm YX}(\tau) = E\left[Y(t) X(t+\tau)\right] = E\left[X(t) Y(t-\tau)\right] = R_{\rm XY}(-\tau)$$
(2.102)

2.4.2.2 功率谱密度

假设平稳随机过程 X(t) 的自相关函数为 $R_x(\tau)$, 当 $R_x(\tau)$ 的傅里叶变换

$$S_{\rm X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\rm X}(\tau) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\tau \qquad (2.103)$$

存在时,称 $S_X(\omega)$ 为 X(t)的功率谱密度(power spectral density, PSD)函数。

PSD 是功率在频率域上的分布, PSD 对频率积分便得到功率, 因此称它为功率的 "谱密度"。如果已知一个平稳随机过程的 PSD 函数,则可以简便地求出其功率的期望。 PSD 函数的单位为

式中,Hz即频率单位赫兹。

2.4.3 常用随机过程模型

惯性导航和组合导航系统中常用的随机过程模型包括白噪声、随机常数、随机游走和一阶高斯马尔可夫过程。接下来依次介绍其基本概念及与惯性导航的关联性。

2.4.3.1 白噪声

白噪声(white noise)的定义是 PSD 函数为常值的随机过程,通常记作 w(t)。由于白噪声的 PSD 函数值在整个频率区间内都为常值,这与白光包含所有可见光频率的现象是类似的,所以取名为"白噪声"。白噪声是最基础、最纯粹的随机过程,其自相关函数为

$$R_{\rm w}\left(\tau\right) = E\left[w\left(t\right)w\left(t+\tau\right)\right] = q_{\rm w}\delta\left(\tau\right) \tag{2.104}$$

式中, qw 是一个非负的常值, 表示白噪声过程 w(t) 的方差强度。根据式 (2.103) 容易 求得白噪声的 PSD 函数为

$$S_{\mathbf{w}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}_{\mathbf{w}} \delta(\tau) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\tau = \mathbf{q}_{\mathbf{w}}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$
(2.105)

式中 δ 为狄拉克函数(也称 delta 函数),其定义在连续域,满足以下性质[15, p.439]

$$\begin{cases} \delta(\tau) = 0, \tau \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \, \mathrm{d}\tau = 1 \end{cases}$$
(2.106)

在离散域定义的克罗内克函数与狄拉克函数的含义相似(在数字信号处理中,两者 泛称单位冲激函数),其等价形式为[16, p.30]

$$\delta [n] = \begin{cases} 0, n \neq 0\\ 1, n = 0 \end{cases}$$
(2.107)

白噪声的自相关和 PSD 函数图像如图2.16所示。从时域的角度来看,白噪声的自相关函数仅在时间延迟为零时取值不为零,对于任何非零的时间延迟,自相关函数立即 衰减至零,这一特性对于具体的信号来说表现为做直上直下的跳变,如图2.17所示。狄 拉克函数的单位是 1/s,通常用 Hz 表示,常数 qw 的单位是方差除以 Hz,与功率谱密 度的单位一致。因此,白噪声的方差强度与功率谱密度函数值大小相等,单位相同。



图 2.17 一个典型的白噪声序列, $w_k \sim \mathcal{N}(0,1)$

从式 (2.105) 容易看出, 白噪声过程具有无限的带宽和无限的功率 (即 PSD 曲线 下的积分面积无限大),以及无限大的方差,且变化无穷快。实际上,理想白噪声在现 实世界中并不存在,实际物理系统的噪声总是有限功率和有限带宽的,即带限白噪声 (bandlimited white noise),可参考[13]深入了解,本书也将在第4章4.2.4小节结合具体实 例进行阐述。

白噪声的形式除了连续时间白噪声之外,还有离散白噪声序列,记作 {w_k}。从连 续时间白噪声到离散白噪声序列的转变可以根据平均过程来实现,其中离散随机变量 在时间 t_k 的值是连续时间白噪声过程在区间 $\left[t_{k-1}, t_k\right]$ 上的平均值

$$w_{k} = w(t_{k}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} w(t) dt$$
 (2.108)

式中, $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 表示离散白噪声序列的采样时间间隔。对上式两边求期望,得

$$E\left(\mathbf{w}_{\mathbf{k}}\right) = E\left[\mathbf{w}\left(\mathbf{t}\right)\right] \tag{2.109}$$

离散白噪声序列的方差为

$$\sigma_{w}^{2} = E\left[w_{k}^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\Delta t\right)^{2}} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} E\left[w\left(t\right)w\left(\tau\right)\right] dtd\tau$$

$$= \frac{1}{\left(\Delta t\right)^{2}} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} q_{w}\delta\left(t-\tau\right) dtd\tau$$

$$= \frac{q_{w}}{\Delta t}$$

$$(2.110)$$

根据上式易知,离散白噪声方差 σ_w^2 的单位为

$$\frac{信号协方差单位}{Hz \times s} = 信号协方差单位 = 信号单位2$$

如果一个白噪声的概率密度函数服从高斯分布,则称其为**高斯白噪声**。其中高斯指的是每个时刻的随机变量的概率分布为正态分布,白噪声主要体现为信号在时间上的不相关性。"高斯"和"白"考察的是信号在两个不同方面的问题。高斯白噪声的连续时间和离散序列形式记作

$$w(t) \sim \mathcal{N}(0, q_w), \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, q_w/\Delta t)$$
 (2.111)

惯性传感器的原始测量值中总会包含某些高频随机误差成分,其频率远高于导航 所关心的载体实际动态的频率范围,在这种情况下,将其建模为白噪声是工程中的常见 做法。

2.4.3.2 随机常数

随机常数 (random constant) 是在所有时刻都是常数的随机过程,但这个常数本身 是一个随机变量的样本实现。随机常数的微分方程和初始条件可写作

$$\dot{X}(t) = 0, X(t_0) = X_0$$
(2.112)

假设随机常数的均值为 0,则其自相关函数为

$$R_{\rm X}\left(\tau\right) = \sigma_{\rm x}^2 \tag{2.113}$$

式中, σ_x^2 为该过程所有随机变量的方差。可见,随机常数过程的自相关函数为常值, **该 随机过程是完全时间相关的**,给定该过程某个时间的取值,则可以确定其他所有时刻的 值。

随机常数非常适合用于描述惯性传感器系统性误差中的逐次上电重复性部分。以陀 螺零偏的逐次上电重复性误差为例,陀螺输出的角速度观测值中包含一个未知的固定 零偏,其数值在上电之后保持不变,但在不同次上电之间又各不相同,表现出随机性。

2.4.3.3 随机游走

随机游走 (random walk) 通过以下方程和初始条件进行描述:

$$\dot{X}(t) = w(t), \quad X(t_0) = 0$$
 (2.114)

或者写成白噪声积分形式

$$X(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \qquad (2.115)$$

式中,w(t)是零均值的驱动白噪声。注意,式(2.115)不是常规意义上的积分,具体解释可查阅参考文献[14, p.153]。随机游走的期望和自相关函数为

$$E[\mathbf{X}(\mathbf{t})] = E\left[\int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{w}(\tau) \,\mathrm{d}\tau\right] = \int_0^{\mathbf{t}} E[\mathbf{w}(\tau)] \,\mathrm{d}\tau = 0$$
(2.116)

$$R_{X}(t_{1}, t_{2}) = E[X(t_{1}) X(t_{2})]$$

$$= \int_{t_{0}}^{t_{2}} \int_{t_{0}}^{t_{1}} E[w(\tau_{1}) w(\tau_{2})] d\tau_{1} d\tau_{2}$$

$$= \int_{t_{0}}^{t_{2}} \int_{t_{0}}^{t_{1}} q_{w} \delta(\tau_{2} - \tau_{1}) d\tau_{1} d\tau_{2}$$

$$= \begin{cases} q_{w}(t_{1} - t_{0}), t_{2} \ge t_{1} > t_{0} \\ q_{w}(t_{2} - t_{0}), t_{1} > t_{2} > t_{0} \end{cases}$$
(2.117)

式中, q_w 为白噪声 w(t) 的方差强度或 PSD, t₀ 为起始时刻。可以看出随机游走是一个非平稳过程。其方差为

$$\sigma_{\rm X}^2 = R_{\rm X} \,({\rm t},{\rm t}) = {\rm q}_{\rm w} \,({\rm t}-{\rm t}_0) \tag{2.118}$$

随机游走的方差随时间线性增长,即标准差随时间的开方线性增长,如图2.18所示。 图中画出了某个随机游走过程的 1000 个样本实现,时长为 100 s,整个图形表现为喇 叭状,表明随着时间的增长该过程在当前时刻点的方差不断变大。二维随机游走的概念 可以通过一个醉汉在街头漫步的比喻来形象地理解:醉汉每一步的行走方向和距离都 是不确定的,表现为漫无目的地四处游荡,时间越久其位置的不确定性越大。随机游走 的现象在自然界中也广泛存在,一个经典的例子是花粉颗粒掉入水面后受到周围水分 子的不断撞击,从而做出的无规则运动,即布朗运动。因此,随机游走又称作布朗运动 (Brownian motion)。



图 2.18 某随机游走过程的图像(1000个样本)

如果白噪声过程是高斯过程,则其积分形成的随机游走变量 X 也是高斯变量,因 为对高斯白噪声变量进行积分或求和的线性运算会保持高斯分布。随机游走过程在惯 性导航中应用非常普遍,例如加速度计输出的比力测量值包含的白噪声积分后,会导致 速度的随机游走误差;同理,陀螺角速度测量值中的白噪声积分后导致姿态的随机游 走误差。随机游走误差模型也常被用于惯性传感器的零偏不稳定性部分的建模,将在 第4章4.2.7小节具体阐述。

2.4.3.4 一阶高斯马尔可夫过程

一阶高斯马尔可夫过程(first-order Gauss-Markov process)X(t) 可用以下连续时间微分方程描述:

$$\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = -\beta \mathbf{X}(\mathbf{t}) + \mathbf{w}(\mathbf{t}) \tag{2.119}$$

式中, $\beta \ge 0$ 为常值,是该过程相关时间 T 的倒数,即 $\beta = 1/T$; w(t)为连续时间的零 均值高斯白噪声过程,又称驱动白噪声,其自相关函数和方差强度 qw 为

$$E\left[\mathbf{w}\left(\mathbf{t}_{1}\right)\mathbf{w}\left(\mathbf{t}_{2}\right)\right] = 2\sigma^{2}\beta\delta\left(\mathbf{t}_{2}-\mathbf{t}_{1}\right)$$

$$(2.120)$$

$$q_{\rm w} = 2\sigma^2\beta \tag{2.121}$$

式中, σ^2 称作一阶高斯马尔可夫过程的方差。一阶高斯马尔可夫过程由 β (或其倒数,即相关时间 T)和方差 σ^2 完全决定。若其在初始时刻取值为 X(t_0) = X_0,则一阶高斯马尔可夫过程在任意时刻 t 的期望为:

$$E[X(t)] = E(X_0) e^{-\beta(t-t_0)}$$
 (2.122)

自相关函数为

$$R_{\rm X}\left(t_1, t_2\right) = \sigma^2 \left(e^{-\beta |t_2 - t_1|} - e^{-\beta |t_1 + t_2 - 2t_0|} \right)$$
(2.123)

当 $t_0 \rightarrow -\infty$, X(t) 的期望为 (式2.122) 0, 自相关函数为

$$R_{\rm X}\left(\tau\right) = \sigma^2 \mathrm{e}^{-\beta|\tau|} \tag{2.124}$$

式中 $\tau = t_2 - t_1$ 。

因此,高斯马尔可夫过程也称作自相关函数为指数形式的随机过程,如图2.19是一 阶高斯马尔可夫过程自相关函数的图像。名称中的"高斯"指的是其驱动白噪声服从高 斯分布,而"马尔可夫"则指的是前后两个相邻时刻的相关性。其中系数 β 决定了相关 程度, β 越小表示相关时间越长,表明信号在时间上的相关性越强。在极限情况下,当 $\beta \rightarrow 0$,则相关时间无穷大,驱动白噪声的方差强度趋向于零,表示随机信号趋近随机 常数。反之, β 越大表示相关时间越小,信号的时间相关程度越低,取极限 T $\rightarrow 0$ 时,则过程退化为白噪声。



图 2.19 一阶高斯马尔可夫过程的自相关函数

一阶高斯马尔可夫过程的功率谱密度函数为

$$S_{\rm X}\left(\omega\right) = \frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2} \tag{2.125}$$

离散化的一阶高斯马尔可夫过程可以写为

$$X_{k+1} = e^{-\Delta t\beta} X_k + w_k \tag{2.126}$$

式中, $\Delta t = t_{k+1} - t_k$,即为离散化序列的采样间隔, w_k 为离散的驱动白噪声序列,其方差为

$$E\left(\mathbf{w}_{k}^{2}\right) = \sigma^{2}\left(1 - e^{-2\Delta t\beta}\right) \tag{2.127}$$

一阶高斯马尔可夫过程被广泛应用于科学和工程领域[13, p.78], 主要因为它能够较 好地描述大量常见的物理过程, 且数学描述相对简单。惯性导航常用它对惯性传感器误 差中随时间缓慢变化的成分(有时间相关性)进行建模, 如陀螺和加速度计的零偏不稳 定性。

第3章 惯性导航器件与系统

3.1 引言

牛顿运动定律在惯性参考系下成立。物体在空间中的运动主要表现为平移和旋转 两种形式。为了实现惯性导航,需要测量载体相对于惯性空间的线运动和角运动,这就 需要使用惯性传感器。惯性传感器通常包括测量线运动的加速度计和敏感角运动的陀 螺仪。国内学者有时将前者简称加表或加计,后者简称为陀螺。惯性传感器的测量以惯 性空间为基准,不依赖于特定的外部参照。正因如此,惯性导航系统具有普适性和无与 伦比的自主性 (fully self-contained),而不局限于特定外部坐标系及其周边环境 (例如 地面或建筑内部空间)。

本章介绍惯性导航器件的基本原理和发展历史,包括惯性传感器(陀螺仪和加速度 计¹)及其组成的惯性测量单元(IMU)和惯性导航系统(INS)。加速度计是基于惯性检 测质量的动力学原理设计的,尽管经历了长时间的发展,但是其工作原理简单且基本保 持不变。然而,为了制造出工程上精密可靠的加速度计,通常需要采用力反馈式设计, 即闭环结构。陀螺的技术和原理非常多样化,并且仍在不断发展之中。所有的陀螺,包 括转子陀螺、光学陀螺、振动陀螺以及微机械陀螺,都是基于特定的物理现象来测量载 体相对于惯性空间的角速度或角度变化。

在一般情况下,大多数加速度计只能测量单个方向的比力,即非引力加速度,详见本章3.2节。类似地,大多数陀螺也只能测量绕一个轴向的角速度或角度变化²。为了实现三维空间的导航定位,通常需要将3只加速度计和3只陀螺集成安装在3个相互垂直的轴上,组成IMU。这样的惯性测量单元能够感知三维空间的角速度向量和比力向量,从而提供完整的三维运动信息。INS 需要对 IMU 的原始数据做复杂的处理才能实现导航功能,其中涉及对角速度进行积分得到姿态变化量,对运动加速度积分以获得速度信息,然后再次对速度积分以得到位置信息。

所有类型 INS 的基本原理都是一样的,但工程实现上通常有两种不同方式:一是 利用陀螺维持一个空间稳定平台,与载体的转动隔离,在导航过程中稳定地指向选定的 参考坐标系轴向,加速度计被安装在该稳定平台上。在这种情况下,导航解算仅需要对 加速度计测量的加速度进行积分,算法简单。这种实现方式称作平台式惯导(gimballed INS 或 platform INS)。二是将陀螺仪和加速度计与载体固定连接,并通过陀螺数据连 续解算载体的姿态,将加速度向量分解到选定的参考坐标系下,然后进行积分运算以实 现导航定位。这种实现方式称为捷联式惯导(strapdown INS)。目前,常见的军用和民 用 INS 主要为捷联惯导,因此本书的内容将专注于捷联式惯性导航系统。

¹注意:低成本惯性传感器在手机中普遍使用后,有时磁力计(magnetometer)也被一些同行当作是 惯性传感器的一种,这是不严谨的。

²转子陀螺是个例外,它能够同时测量两个方向的角运动。

在深入理解三维空间中的惯性导航解算之前,先从较为简单的一维和二维场景着 手,这将有助于建立基本概念。在这些低维度场景中,惯性导航的原理和实现方式更为 直观。本书主要关注地球表面附近空间的惯性导航应用,因此通常以地球或地球的当地 水平坐标系作为参考坐标系。然而,需要注意的是,这些坐标系并非惯性坐标系。在导 航计算中,除了考虑运动加速度和角速度外,还需考虑由于地球相对于惯性空间的旋转 所引起的向心加速度、科里奥利加速度(哥氏加速度)以及重力加速度等。因此,了解 在旋转坐标系下加速度计和陀螺仪的理论输出所包含的各分量是必要的,掌握这些理 论概念将有助于我们更深入地理解惯性测量单元的标定过程以及惯性导航算法的实现 原理。

本章采用了与其他教材略微不同的方式来介绍惯性器件的历史与发展趋势。笔者 相信,在读者掌握了加速度计和陀螺仪的基本原理之后,他们能够更加深刻地理解惯导 技术是如何逐步演进的。本章最后还分类介绍了惯性技术的一些典型应用。

3.2 加速度计

加速度计是惯性导航系统的关键惯性元件之一,用于测量载体相对于惯性空间的 非引力(non-gravitational force)加速度,也称为比力(specific force)。加速度计的测 量原理相对简单,可简化为由壳体、质量块、理想弹簧和位移指示器等核心部件组成的 质量弹簧系统,如图3.1所示。在该系统中,质量块被约束着只能沿敏感轴方向移动。质 量块两端各连接一根弹簧,弹簧两端固定在壳体上。位移指示器用于检测并指示质量块 相对于壳体的位移变化,测量弹簧的伸缩量。



图 3.1 加速度计原理示意图(处于惯性坐标系中)

如图3.1 (a) 所示,假设上述加速度计装置处于理想惯性参考系(不存在引力作用) 内,处于静止或匀速直线运动状态,此时弹簧没有应力,位移指示器显示零值。如果沿 加速度计敏感轴方向施加一个向右的外力 F (接触力或物理力),使壳体以恒定的加速 度向右加速,如图3.1 (b) 所示。这个力通过弹簧传递到质量块,左侧弹簧压缩,右侧 弹簧被拉伸并将力施加在检测质量块上,直至其加速度与壳体加速度相等,系统重新达 到平衡状态。最终质量块相对于壳体向左偏移,其位移大小 f 与装置的加速度成正比。 这个位移量可以通过位移指示器测量得到,从而测量出装置的加速度。 现在,假设该装置处于一个受引力场影响的非惯性参考系内,引力加速度的方向向下,大小为g。将整个装置逆时针旋转90°使其敏感轴与引力方向平行。如图3.2(a)所示,由于引力的作用,质量块会压缩下侧弹簧和拉伸上侧弹簧,直至非对称弹簧的作用力等于引力,质量块将处于平衡状态,位移指示器输出等于引力加速度g。若移除支撑,装置将在引力的作用下做自由落体运动,其运动加速度等于引力加速度,但系统平衡后指示器处于零位,即加速度计的输出为0。这一示例可能让初学者颇感困惑:在引力场的作用下,装置静止时运动加速度为零,而加速度计输出为g;自由落体时装置的运动加速度为g,但加速度计的输出却为0。



图 3.2 处于引力场中的加速度计

下面通过对质量块做受力分析来进一步解释。如图3.2所示,规定向上为正方向(当然也可以选择向下为正方向,读者可以做相似的分析)。质量块受到两个外部作用力: 非对称的弹簧力和万有引力。根据牛顿第二定律,有

$$\mathbf{m}\mathbf{a} = \mathbf{F}_{s} + \mathbf{m}\mathbf{g} \tag{3.1}$$

式中, a 是整个装置在外力作用下相对于惯性空间的运动加速度向量, g 是万有引力加速度向量(注意不是重力加速度, 解释见本章3.5.3.2小节), F_s 是弹簧系统对质量块施加的弹力向量, m 是质量块的质量。由式(3.1)可得

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}_{s}}{m} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \tag{3.2}$$

式中³, **f** 是作用在单位质量上的弹簧力,也即加速度计的实际输出。**f** 也称为比力⁴,式 (3.2) 即加速度计测量方程⁵。

³注意,式(3.2)的 \mathbf{a} , f和g均为向量,而不是标量。

⁴值得指出的是f的英文名称和中文翻译都不甚确切,因为f显然不是一种力,而是加速度。

⁵加速度计测量方程是惯性导航中非常重要的一个公式,即使读者记不住本书的任何其他公式,这个 公式也应该记住。

总之,从原理上表明加速度计不能直接感知引力场的存在,加速度计测量的不是运动加速度,而是运动加速度与引力加速度之差,这是一个比较特殊的加速度。可直观但不太严谨的解释如下:因为加速度计的输出是加速度计位移指示器的读数,而位移指示器的读数只能反映弹簧的形变。只有当某个作用力必须通过弹簧系统才能作用在质量块时,加速度计才能测量该力。而万有引力直接作用在质量块上,不需要经过弹簧或其他媒介,因此加速度计受到引力作用时,质量块与壳体之间不会发生相对运动,导致加速度计的指针读数无法反映出引力造成的加速度。因此,所有加速度计测量的只是比力,而不是全加速度(或绝对运动加速度)。为了获取导航定位所需的运动加速度 a,系统还必须补偿引力加速度。很显然,要将加速度计的测量与惯性加速度联系起来,对引力场的了解是必不可少的。

加速度计测量的比力是一种加速度,其标准单位是 m/s²,也常用重力加速度 g 来 表示。然而,由于实际重力值会随着所处位置的变化而改变,g并不是一个严谨的单 位。实际应用中,常用一个更精细的单位:Gal(伽利略,以科学家伽利略命名)或毫 伽 (mGal)。

 $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$ $1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2 \approx 1 \text{ }\mu\text{g}$ $1 \text{ }\mu\text{g} = 10^{-6} \text{ g}$

3.2.1 加速度计的力反馈设计

如图3.1所示的加速度计装置采用了典型的开环式设计。然而,按此设计制造的加速度计在响应能力和测量精度方面的性能并不理想。原因如下:为了提高加速度计的精度,一方面需用"理想弹簧",要求弹簧至少在加速度计的有效测量范围内弹性系数稳定且没有非线性误差。另一方面应考虑增加质量块的质量并使用弹性系数低的弹簧(软弹簧):较大的质量块意味着更大的惯性,相同的运动加速度会导致弹簧更大的变形,这有助于提高位移指示器的灵敏度和精度;使用较软的弹簧也可以在相同的加速度下产生更大的弹簧变形量,便于位移指示器测量。但是,由大质量块和软弹簧组成的系统固有振荡周期长;在外力扰动下系统需要较长时间才能达到平衡状态,表现为弹簧力需要较长时间才能使质量块"跟上"壳体的加速运动。如果加速度在外力作用下发生变化,再次跟踪和测量加速度同样需要较长时间。在实际情况中,载体的运动加速度可能频繁变化,开环加速度计难以实时有效地测量载体瞬时的加速度。

上述问题的本质是开环加速度计的带宽过窄,对外界输入的响应不够快,也即响应 频率过低。为解决该问题,高精度的加速度计普遍采用了闭环结构设计,也称为力反馈 式设计,其原理如图3.3所示。力反馈式加速度计通过驱动装置对质量块主动施加反向 力,使其保持在力平衡位置附近(即零位),不因外力而显著偏移。具体实现如下:首 先,检测质量块的位移,并用放大器放大该信号,确保即使微小位移也能被检测。接下 来,该位移信号经过闭环控制器生成调控量输出至静电驱动器(或其他施力装置),后 者通过调节电极的电压向质量块施加静电力。在外力作用下,质量块倾向于偏离平衡位 置;闭环控制器感知该趋势并即时施加反向力,使质量块维持或恢复至平衡位置。力反 馈式加速度计的指针几乎不偏离平衡位置,其位移不直接反映感知的比力。与开环加速 度计通过指针偏移测量加速度不同,力反馈式加速度计中驱动装置施加的力与待测的 比力成正比,其读数由此给出。



图 3.3 力反馈加速度计原理示意图

力反馈式加速度计在保障测量精度的同时,显著提升了动态响应性能,有效克服了 开环式加速度计的缺陷。首先,无论外力如何变化,弹簧始终工作在微小变形的状态下, 非线性误差难以显现,可视为理想弹簧,完全满足胡克定律。其次,得益于电子反馈回 路的快速响应,质量块能迅速恢复平衡,相较于开环系统,避免了质量弹簧系统机械振 荡导致的测量延迟,实现了对瞬时加速度的快速跟踪。此设计相当于使用了一个理想化 的"很硬的电弹簧",非常精密且响应速度极快。

当然,闭环式系统或传感器相较于开环设计更为复杂,它们是机电一体化的高度集成系统。力反馈回路的参数须精心设计,以避免系统出现振荡或超调等问题。尽管这增加了系统的复杂性,但换来了传感器卓越的性能。这种改进方式是非常典型的,其思想也很值得借鉴并应用到自己的研究工作中。

3.2.2 加速度计的类型

在当前的捷联惯性导航系统中普遍采用的加速度计设计主要有振梁式和摆式两种。 振梁式加速度计的结构设计如图3.4所示。在此设计中,一对石英晶体梁被固定在壳体 上,并沿着敏感轴方向排列,共同支撑一个检测质量块。两个晶体梁各自以其特定的谐 振频率振动。当敏感轴方向不存在加速度时,两梁将以相同的频率振动;相反,当敏感 轴方向存在加速度时,质量块的惯性效应会导致一个梁受到压缩,而另一个梁受到拉 伸。受压梁的谐振频率降低,而受拉梁的谐振频率升高,且频率差与加速度成正比。基 于这一原理,振梁式加速度计巧妙地将加速度的测量转化为对振梁谐振频率的提取。为



图 3.4 振梁式加速度计结构示意图(根据参考文献[2, p.142]重绘)

了提升性能,通常通过对称布置振动梁,以减小或消除非线性和振梁谐振频率迁移等误差。尽管振梁式加速度计属于开环系统设计,但检测质量块实际上是由振动梁所固定约束的,因此其敏感轴相对于壳体的位置不会发生变动[17,6.4.1小节]。

摆式加速度计的工作原理与之前提到的质量弹簧系统大致相同,但在具体实现上存在一些差异。除了摆式加速度计之外,还存在表面声波加速度计、微硅加速度计、光 纤加速度计以及光学加速度计等多种类型,感兴趣的读者可查阅参考文献[17,18,19]。

3.3 陀螺仪

我们对陀螺既熟悉又陌生。陀螺作为一种喜闻乐见的儿童玩具,早已家喻户晓。然 而,陀螺作为导航传感器,及其在导航制导等军事应用中所扮演的重要角色,往往仅为 少数专业人士所熟知。当玩具陀螺在被抽动或手动旋转后能保持直立平衡,这便是陀螺 仪最原始的形式。惯性导航所使用的陀螺仪已不限于上述形态,其定义扩展为一种用于 测量载体相对于惯性参考系的角速率或角度变化的传感器。值得特别强调的是,陀螺测 量角速度的参考系是惯性坐标系,无须依赖外部参照。初学者容易将某些角度或角速度 传感器误认作陀螺。例如,精密机床上常用的光电编码器能够准确测量机械臂相对于机 床的旋转角度,但它不能称作陀螺,因为其测量的参照系是机床或基座这一具体的部 件。

下面介绍几种常见陀螺的基本原理,包括机械陀螺、光学陀螺和微机械陀螺。机械 陀螺主要包括转子陀螺和振动陀螺,光学陀螺包括光纤陀螺和激光陀螺。

3.3.1 转子陀螺

凡是能绕定点高速旋转的质量体,都可以称为转子陀螺。转子陀螺具有两个基本特性,即定轴性和进动性。定轴性是指在没有外力矩作用的情况下,装载陀螺仪的载体不管如何运动,陀螺的自转轴可相对惯性空间保持方向不变,这就在惯性空间中建立了一

个基准方向⁶。有了这一基准,即可通过测量载体相对于基准方向的转动来测量载体相 对于惯性空间的角运动。陀螺的进动性在此不详述,按照自转轴能够进动的自由度可分 为单自由度陀螺和双自由度陀螺。下面通过举例来解释利用转子陀螺测量角度变化或 角速度的基本原理。

图3.5展示了单轴和双轴转子陀螺的示意图。单轴转子陀螺在高速旋转后,其自转 轴在惯性空间中保持稳定。如图3.5(a)所示,即使基座随载体绕框架轴旋转,转轴也 不会随之移动。通过角度传感器测量框架相对于基座的角度变化,可以得到基座沿着框 架轴转动的角度。因此,单轴转子陀螺设计只能感知一个方向的角速度或角度变化。为 了感知两个自由度,需要在单轴转子陀螺的基础上增加一个外框。假设转子自转轴垂直 于地面,高速旋转后自转轴会一直保持这一方向。如果基座绕内框轴转动,外框也会随 之摇摆,内框与外框之间存在相对转动,安装在内框转轴上的角度传感器可以读取该角 度变化。而如果基座绕外框轴转动,此时安装在外框轴上的角度传感器可以读取沿该自 由度转动的角度,从而实现两个自由度上的相对姿态测量。



图 3.5 转子陀螺的测角原理示意图

然而,在三维空间中,姿态存在3个自由度。当整个基座绕着转子的自转轴方向旋转时,该装置是无法感知到的。换言之,当基座沿着与陀螺转子自转轴相同的方向旋转时,转子陀螺是无法感知的。要感知第三个自由度的姿态角,需要增加另一个转子,并且其转轴方向不能与前一个转子的转轴方向平行,最好是正交放置,例如在图中增加一个水平放置的转子陀螺。一个转子陀螺最多能感知两个方向,而两个转子可以感知4个方向,则其中一个方向会存在冗余。需要注意的是,除了转子陀螺可以感知两个旋转轴以外,其他类型的陀螺大多是单轴感知的,要实现3个自由度的感知至少需要3个陀螺。除了转子陀螺,机械陀螺还包括振动陀螺和已经较少使用的动力调谐陀螺等类型。

⁶基准是测量的基础。以一个类似的例子来说明,一个静止悬挂的单摆的摆线指示了铅垂方向,可用作 当地水平面的测量基准。要检测一个平面是否与当地水平面平行,只需测量该平面与摆线的夹角,判断 是否为 90°。垂线只是在地球表面有效的一个方向基准。转子陀螺的空间定轴性在惯性空间中建立了一 个方向基准,这样只要测量装载了转子陀螺的载体相对转子转轴的角度或角速度即可得到载体相对于惯 性空间的转动情况,实现在宇宙中普适有效的导航定位。

3.3.2 振动陀螺

振动陀螺(vibratory gyroscope),也称为哥氏振动陀螺仪(Coriolis vibration gyroscope, CVG),其起源可以追溯到 19 世纪中期。傅科发现,单摆振动时,其振动平面 保持不变,不受支撑转动的影响。这一原理后来被用于测定角速度。振动陀螺的核心部 分是受迫作简谐振动的元件,即振子,如图3.6所示。振动元件处于激振状态,例如在 x 轴方向产生振荡线速度。当陀螺壳体绕与振动平面垂直的方向旋转时,振动元件受到哥 氏力作用,在振动的正交方向(y 轴)上产生交变的哥氏加速度,其大小与旋转速率成 正比。哥氏加速度改变了振动元件的运动,如果能够检测出这种变化,就可以得出输入 转动角速度的数值。因此,振动元件、激振机构和检测哥氏加速度的装置构成了振动陀 螺的敏感元件。



图 3.6 振动陀螺示意图

振动陀螺按振动元件结构型式可分为:振梁式、音叉式、振动薄壳式和振动板式。 在实际应用中,振动元件的运动被约束在受迫振动的方向上,只有绕输出轴的壳体转 动才会导致输出轴上产生振摆运动。大多数振动陀螺的精度较低,成本也相对较低,例 如 MEMS 陀螺几乎都是振动陀螺。一个例外是半球谐振陀螺(hemispherical resonator gyroscope, HRG),可以达到航空导航的精度级别[2]。

3.3.3 光学陀螺

光学陀螺在陀螺仪家族中可谓独树一帜,为惯性传感器的技术发展带来了一次颠 覆式的革命。光学陀螺基于光学上的萨格纳克效应(Sagnac effect)感知载体相对于惯 性空间的转动,该物理效应早在20世纪初(1913年)的光学研究中就已被发现。然而, 受限于光源和光路等工艺问题,光学陀螺直到20世纪70年代才得以问世。

通过一个例子来解释萨格纳克效应,进而理解光学陀螺的基本工作原理。考虑一个 理想的环形干涉仪,如图3.7所示,光束被引导在环路中传播,经过分束器分成两束沿 相反方向传播的光(图中红色和蓝色只区分光的方向,不表示频率)。当环形干涉仪相 对惯性空间无旋转时,两束光的传播路径长度相等,将同时到达接收器,如图3.7(b) 所示。然而,如果光传播的平面光路绕垂直于平面的轴相对于惯性空间旋转,角速度为 ω,图3.7(c)中红色光束和蓝色光束到达接收器的光程不再相等,红色光束的光程变 短,而蓝色光束的光程变长。当然,如果转动角速度的方向相反,则情况相反。因此, 沿光束传播的相同方向转动闭合光路,导致光程增加;沿光束传播的相反方向转动闭合 光路,导致光程减小。这就是光学中的萨格纳克效应。通过测量这组反向传播的光束的 光程差,可以测量闭合光路相对于惯性空间的转动角速度。可以证明,两条光束的光程 差与环路的转动角速度成正比:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{4A\omega}{c} \tag{3.3}$$

式中, ΔL 为光程差, A 是光纤回路围成的面积, ω 为与光纤回路平面垂直方向上的转动角速率, c 为光速。



图 3.7 萨格纳克效应 (Sagnac effect) 示意图

此处不要从宏观物体的角度去理解萨格纳克效应,否则容易产生误解。例如,如果 将环路理解为环形轨道,将光束理解为有质量的弹珠。弹珠相对轨道同时同速向两个相 反方向发射,但由于弹珠发射时整个环路在旋转,导致其中一个弹珠的绝对速度更大, 另一个的绝对速度更小,轨道持续以一个固定的角速度旋转,两颗弹珠仍然会同时到达 终点。此时没有萨格纳克效应。然而,狭义相对论指出光相对于惯性空间的传播速度 c 是恒定不变的常数,尽管正反传播的两束光是从旋转的光源中发射,但它们相对惯性空 间的运动速度仍为 c,不会因为光源存在初始速度而发生改变。 根据上述原理,可以设计光学陀螺,包括光纤陀螺和激光陀螺等,如图3.8所示。它 们的工作原理都基于干涉仪产生的光程差,差异则主要体现在光路类型、光束的产生方 式以及如何测量光程差等方面。



图 3.8 激光陀螺[20]

3.3.4 MEMS 陀螺

20世纪 80年代末至 90年代初,由于 GPS 的发展和惯导民用市场的开拓,市场 对低精度、低成本、高可靠性的陀螺仪需求日益增长,由此催生了结构简化的振动陀 螺[7]。与此同时,微电子加工技术的成熟为大规模开发微机电集成仪表奠定了基础。利 用微机械结构和集成电路工艺实现一体化微机电系统制造的技术,通常称为微机电系 统(micro-electro-mechanical system, MEMS)技术。MEMS 不是传统机械的简单和直 接微型化,它远远超出了传统机械的范畴和概念。MEMS 传感器的出现,使得传感器 技术出现了一次新的飞跃,其在仪器仪表产业中的重要性,可与 20 世纪五六十年代集 成电路的问世及其对电子产业的革命性影响相媲美。

MEMS 陀螺仪是利用 MEMS 技术制作的陀螺仪,如图3.9所示[21,22]。它的制作 是通过采用半导体生产中成熟的沉积、蚀刻和掺杂等工艺,将陀螺的机械结构和电子线 路集成在微小的硅片上来完成的,最终形成了一种集成电路芯片大小的微型陀螺仪,尺 寸可在毫米到微米量级范围内变化,被誉为指尖上的陀螺仪。

MEMS 陀螺仪主要是振动陀螺,通过检测振子的哥氏加速度来测量载体的角速度。 与机械转子式陀螺仪或光学陀螺仪相比,MEMS 陀螺仪的主要特征有:体积小、功耗低;成本低廉,适合大批量生产;动态范围大,可靠性高,可用于恶劣运动环境;启动时间短,适合快速响应场景;精度偏低,适合短时应用或与其他导航定位系统组合应用。

3.4 惯性测量单元

如3.3.1节所述,一般情况下,单个陀螺和加速度计仅能感知一个特定方向上的角速 度和比力。因此,在三维导航系统中,需要将三轴陀螺和三轴加速度计集成在一起⁷,才 能形成一个完整的感知单元,称为惯性测量单元 (Inertial Measurement Unit, IMU)。

⁷IMU 通常将 3 个加速度计和 3 个陀螺分别安装在 3 个相互正交的轴向上。



图 3.9 经典的 MEMS 陀螺 (Analog Devices Inc., ADI)

严格来说,只有三轴陀螺和三轴加速度计组合而成的装置,若不包含其他辅助元件,还不能称为 IMU,而应称为惯性传感器组 (Inertial Sensor Assembly, ISA)。

IMU 与 ISA 的主要区别在于, IMU 还需要对 ISA 的输出进行量纲转换, 对已知的 误差项进行补偿, 以确保数据的精度, 并按照特定接口协议输出。首先, IMU 处理器需 要对惯性传感器的直接输出, 例如电压差、电流或者脉冲信号, 转换为比力和角速率。 其次, 惯性传感器的常值误差通常在实验室进行标定, 并将标定结果存放在 IMU 内部 的存储器中。实际工作时, IMU 处理器会根据这些标定结果对传感器的原始输出进行 实时的误差补偿。

在实际应用中,通常只使用 IMU 这一术语,而 ISA 则较少提及,一般只在惯性传 感器生产商内部才做如此区分。IMU 配上惯性导航算法,以及一些外围支持,如供电、 外壳、通信接口等,便构成了完整的惯性导航系统 (INS),该系统能够输出导航用户需 要的位置、速度、姿态角等导航参数。因此,在文档的编写和审阅过程中,应当严格区 分 IMU 与 INS 这两个概念,避免将二者混淆使用,见表3.1。

INS 的导航计算要求 IMU 以离散化数字格式提供原始测量信号,这会不可避免地造成信息损失。实际的 IMU,尤其是高精度的 IMU,往往并不直接输出载体相对惯性空间的比力和角速度测量值,而是在采样间隔内对比力和角速度进行积分,以"增量"

Inertial Sensor Assembly	• 三轴陀螺 + 三轴加速度计
(ISA)	• 输出原始传感器数据
Inertial Measurement Unit (IMU)	• ISA+ 误差标定补偿(零偏和比例因子误差等)
	和数据转换
	• 输出误差补偿后的传感器数据
Inertial Navigation System	● IMU+ 惯性导航算法 (惯导机械编排)
(INS)	• 输出位置、速度、姿态角等导航信息

表 3.1 ISA、IMU 和 INS 的区别

形式输出原始观测:

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) dt, \quad \Delta \mathbf{v}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{f}^{b}(t) dt$$
(3.4)

式中, t_{k-1} 和 t_k 分别是采样时刻, 下标 k 表示 t_k 时刻; ω_{ib} 为载体相对于惯性系(i 系)的转动角速度向量, f 为比力向量, 右上标 b 表示载体坐标系。 $\Delta \theta$ 和 Δv 就是常 说的 IMU 增量输出, 其中 $\Delta \theta$ 为角增量, Δv 为速度增量。然而, 此处容易引起误解, 其中 Δv 并不是导航关心的速度变化量, 而只是比力的积分, 两者并不是一回事。关于 这一点, 将在第6章6.2.4.1小节进一步讨论。

中高精度 IMU 采用增量格式输出原始数据,有其技术合理性,也有其历史原因。 在惯性导航技术发展的黄金时期(20世纪 50-70年代),计算机技术相对落后。当时, 适用于飞机和导弹上的移动式计算机在数字采样和计算能力方面均受到极大限制,无 法支撑高频率的数字化采样和复杂的惯性导航解算。在计算能力有限的情况下,必须将 数据率降至较低水平。然而,低频的角速度和比力测量值在惯导解算过程中将导致明显 的信息损失。由于 INS 解算是一个积分过程,以姿态求解为例,理论上需要计算出角速 率曲线下方的面积,如果仅已知离散点的角速度,在数值积分运算时,只能计算出对应 的梯形面积,由此带来的精度损失为曲线所围面积与梯形面积之差,如图3.10所示。如 果每次采样都损失一部分,那么长时间的离散化和数字化的积分过程造成的精度损失 将接近甚至大于陀螺和加速度计器件本身误差的影响,这显然是不合理的。



图 3.10 离散的角增量采样示意图(以陀螺为例)

上述问题的有效解决方案即采用增量输出:高精度 IMU 在采样的前端直接完成积 分过程,通过模拟电路的专门设计直接把曲线下面的面积得出来,对其进行数字采样, 直接输出角增量⁸。采用增量输出,积分面积不再因为离散化采样而有损失,从某种角 度来看可以不需要遵循采样定理了,因此对采样率的要求可显著降低。

⁸闭环光学陀螺输出的脉冲序列的频率反映其角速度,因此陀螺输出的采样区间内的脉冲计数值正好 就反映了角度增量。

注意,增量输出虽然有效解决了采样区间内 IMU 信号幅度变化对惯导解算精度的 影响,但却未考虑三轴角速度向量和三轴比力向量在采样区间内的方向变化的影响。该 损失需要在惯导解算中通过一定的运动模型假设进行补偿,于是就形成了惯导算法中 姿态更新的圆锥误差补偿项和速度更新中的划桨效应补偿项等,详见第6章6.2、6.3节。

3.5 惯性导航系统

在前文的惯性传感器探讨中,已经初步理解了构建惯性导航系统所需的基本测量 值。为深入探讨,假设已获得了 IMU 测量数据,并重点探讨如何对这些测量值进行处 理以达成导航目标。考虑到三维空间中的惯性导航和数据处理的复杂性和抽象性,首先 从一维和二维场景出发,通过具体的示例揭示惯性导航的基本原理和解算方法,使读者 能够直观地理解,而不必立即深入到涉及三维导航的复杂数学计算中。最后,将通过实 例来阐述载体在地球表面几种典型运动情况下惯性测量单元的理论输出。这将为后续学 习惯性导航算法奠定基础,因为三维空间中的复杂运动实际上是上述简单运动的组合, 需要深入理解如何从陀螺仪和加速度计的测量值中提取导航真正关心的角速度和运动 加速度,以实现地球附近的导航定位。

3.5.1 惯性坐标系下的一维惯性导航

首先,考虑一个简单的一维导航示例,如图3.11所示。假设需要对惯性空间(不受 引力场作用的影响)中直线轨道上的火车进行实时导航定位,即确定其在轨道上的一维 位置坐标 p(t)。为此,在火车上安装了一只加速度计来测量火车的前向运动加速度 a。 在已知火车的初始速度 v₀ 和初始位置 p₀ 的情况下,通过对加速度计测量值进行时间 积分,可以实时确定火车的速度 v(t):

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{a}\left(\tau\right) \mathrm{d}\tau \tag{3.5}$$



图 3.11 惯性坐标系下一维 INS 导航示意图

通过对瞬时加速度进行二次积分,可以实时得到火车相对于已知起始点的位置:

$$\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \mathbf{p}_0 + \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{v}(\tau) \mathrm{d}\tau$$
(3.6)

上述案例使用一个加速度计和能够进行积分运算的计算机,即构建出了简单的一 维导航系统。细心的读者可能已经注意到,面向这样的一维导航场景中,用一个速度 计(里程计)或测速雷达测量轨道车相对于轨道的运动速度来设计导航系统似乎更简 单,只需要一次积分即可获得位置。确实如此!但是需要注意的是,速度计需要指定特 定的参照物,例如安装在车轮上的旋转里程计是以轨道为参照物,测速雷达是以周边地 物环境为参照物,如此设计的导航系统也只能局限于在指定的外部参照物存在且能可 靠感知的情况下才能使用,而换一个场景或参照物,则无法导航定位。而加速度计是自 主测量相对于惯性坐标系的加速度,不需要任何外部参照,这样设计的系统在任何场景 下都能使用,不受特定外部参考物的局限。

3.5.2 惯性坐标系下的二维平面惯性导航

二维平面导航的目标是确定载体相对于参考坐标系在平面内的位置和速度。以火 车沿直线铁轨运动为例,现在关注的不仅是火车距离起始点的距离,还包括火车在参考 坐标系 OEN 下的坐标,如图3.12所示。这种情况下,只要获取火车沿铁轨方向的瞬时 加速度及轨道相对于坐标系的固定方位角,就能确定火车的瞬时位置坐标 (p_E,p_N)。具 体的计算流程如下:首先,将测得的加速度分解为东向分量 a_E 和北向分量 a_N,然后对 这些分解后的加速度信号进行积分,以获得火车在坐标轴上的速度和位置变化。



图 3.12 惯性坐标系下二维平面的直线轨道导航示意图

$$p_{E}(t) = p_{E,0} + v_{E,0}t + \int_{0}^{t} \int_{0}^{\tau} a_{E}(u) \, dud\tau$$

$$p_{N}(t) = p_{N,0} + v_{N,0}t + \int_{0}^{t} \int_{0}^{\tau} a_{N}(u) \, dud\tau$$
(3.7)

式中, $p_E(t)$ 和 $p_N(t)$ 分别表示 t 时刻轨道车位置的东向和北向坐标, $p_{E,0}$ 和 $p_{N,0}$ 为初 始位置坐标, $v_{E,0}$ 和 $v_{N,0}$ 为东向和北向初始速度。

接下来,考虑更为一般的情况:轨道有拐弯,即轨道车的方位角实时发生变化。适 用于这一场景的 INS 通常需要在载体上安装两个加速度计以感知两个方向上的加速度, 具体实现有两种经典方式。第一种方式:通过系统设计使得载体上安装的加速度计,不 论载体如何改变航向,始终指向图中参考坐标系的东向和北向,如图3.13所示。此时, 导航解算过程只需对这两个方向上的运动加速度进行积分,便可获得东向和北向的速 度及位移变化。



图 3.13 惯性坐标系下二维平台式 INS 示意图

上述导航解算很简单,但是系统实现中还涉及一个实际问题:如何让两只加速度计 能够始终指向东向和北向,而不受载体航向变化的影响?一种可行的方案是将加速度计 安装在与载体转动隔离的稳定平台上。该稳定平台使用陀螺仪测量载体的角度变化,并 将其反馈至闭环控制系统,以确保无论载体如何运动,稳定平台始终保持在所要求的方 向上。这种将加速度计安装在陀螺控制的空间稳定平台上的惯性导航系统被称为平台 式惯性导航系统 (gimballed INS)。

然而,实现和维护上述高精度的空间稳定平台的成本和技术复杂性都很高。因此, 还有另一种方法可以实现这种二维平面导航系统,即将两个加速度计和一个陀螺直接固 定在载体上。在这种配置下,加速度计不再固定地指示东向和北向,而是随载体转弯而 发生变化,如图3.14所示。由于陀螺能够通过角速度积分运算持续测量载体的方位角变 化,结合这些方位角数据,可以计算出载体的瞬时方位角。然后,将加速度向量做投影变 换,可以计算出载体在东向和北向上的加速度,从而做二次积分得到位置的变化量。这 种将惯性传感器与载体固连安装的导航系统称为捷联式惯性导航系统 (strapdown INS 或 platform INS)。

$$p_{E}(t) = p_{E,0} + v_{E,0}t + \iint (a_{x}\sin\psi - a_{y}\cos\psi)dtdt$$

$$p_{N}(t) = p_{N,0} + v_{N,0}t + \iint (a_{x}\cos\psi + a_{y}\sin\psi)dtdt$$
(3.8)

式中, a_x 、 a_y 分别为 x、y 轴加速度计测量值, ψ 为瞬时方位角(又称航向角)。上式可以写成如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} p_{\rm E}(t) \\ p_{\rm N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{\rm E,0} \\ p_{\rm N,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{\rm E,0}t \\ v_{\rm N,0}t \end{bmatrix} + \iint \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\psi & -\cos\psi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}}_{\underline{} \ \ \, \underline{} \ \ \underline{} \ \ \underline{} \ \underline{} \ \ \underline{} \ \underline{}$$

式中的坐标变换矩阵又称姿态矩阵,可将加速度向量坐标从载体坐标系变换至选定的参考坐标系(OEN)下。面向三维空间导航的姿态矩阵将在第6章6.2.2小节详细阐述。



图 3.14 惯性坐标系下二维捷联式 INS 示意图

3.5.3 地球表面运动状态下的 IMU 输出

接下来,对前面的案例进行拓展,以帮助读者理解近地面三维空间的惯性导航系统的基本工作原理:参考坐标系需要从不受引力场影响、没有加速度、没有转动的惯性坐标系调整为旋转坐标系(如 e 系或 n 系),空间维度从一维或二维拓展到三维。近地面三维空间 INS 的基本原理难以形象直观地阐释,可以通过其解算流程来理解。图3.15是以 n 系为参考系时捷联惯导的解算过程,可以看出相比前面介绍的一维和二维 INS 案例,其复杂度显著增加,主要来源于以下几个方面:

 地球自转的影响:一方面,地球自转使得陀螺观测值中包含地心地固坐标系相对 惯性坐标系的转动角速度 ω_{ie},即地球自转角速度向量。另一方面,使得加速度 计受到虚拟离心力的影响,额外"感知"⁹对应的向心加速度为 -ω_{ie}×(ω_{ie}× r_{eb}); 同时,当载体相对地面运动时,加速度计还将"感知"到哥氏加速度 -2ω_{ie}× v_{eb} 。其中 r_{eb} 是载体的位置向量,由地心指向载体位置; v_{eb} 是载体相对于地球的 速度。

⁹此处"感知"带引号,表示实际上加速度计无法感知到这些虚拟的力,需要从加速度计比力测量值中补偿这些虚拟力对应的加速度才能得到导航所需要的"载体相对于导航参考坐标系的运动加速度"。

- 地球引力的影响:地球附近的导航,载体受到地球引力场的影响,由于加速度计无法感知引力的作用,因此必须补偿引力加速度g。
- 地表曲率的影响:地球是椭球形,地表不是平面。当载体沿着地面向北或向东运动时,在惯性坐标系下观察,该载体实际在做圆周运动;当选择 n 系为参考系时,此时陀螺观测值中还会引入位移角速度 ω_{en};此外,加速度计将"感知"到对应于这一角速度的对地向心加速度 -ω_{en} × v_{eb}。



图 3.15 导航系(n 系)下的捷联惯性导航解算流程

上述角速度和加速度的补偿项,称作"有害角速度"和"有害加速度",可通过力 学分析将它们严格推导出来。接下来直观解释这些项的物理含义。虽然很难用简单的示 意图形象地描述三维惯性导航的计算过程,但可以通过分析三维空间中与运载体固联 的 IMU 的理论输出,从而理解哪些测量值是导航所需的,以及哪些量需要补偿。在这 个分析过程中,也是从一些特定的简单三维运动来分析,然后再到更一般的三维线运动 和角运动。这些分析非常重要,将有助于读者理解 IMU 误差标定和惯性导航算法。因 为 IMU 的误差标定需要用 IMU 的实际输出减去理论值,因此 IMU 的理论输出就变得 非常重要。同样的,对于惯性导航来说,当选择不同的坐标系作为参考时,加速度计和 陀螺测量的并不直接是导航所关心的运动加速度和角速度,我们需要知道如何从 IMU 的测量值中提取这些信息。为此,需要理解和掌握 IMU 的理论输出。

3.5.3.1 陀螺观测

(1) 静止 IMU 的陀螺输出

如图3.16所示,尽管静置于地面的 IMU 相对于地球或地面没有线运动和角运动,但 它会随着地球自转¹⁰而相对惯性空间发生转动。因此,其陀螺感知的角速度并不为零, 而是地球自转的角速度 ω_{ie} ,该向量由地心指向北极。可以用角速度向量的分解来解释,

¹⁰此处忽略了地球公转和太阳系的旋转,因为这些角速度对地球附近的惯性导航来说,其影响一般可忽略不计。

陀螺感知的角速度向量可分解为

$$oldsymbol{\omega}_{
m ib} = oldsymbol{\omega}_{
m ie} + oldsymbol{\omega}_{
m eb}$$

式中, ω_{ib} 为载体(b系)相对于惯性坐标系的转动角速度向量,是陀螺感知的理论角速度; ω_{eb} 为载体(b系)相对于地球(e系)的转动角速度向量。



图 3.16 静止在地面的 IMU 陀螺输出示意图

当 IMU 静止放置在地面时,相对于地球没有角运动, $\omega_{eb} = 0$,此时有

 $oldsymbol{\omega}_{
m ib} = oldsymbol{\omega}_{
m ie}$

在地球附近,无论 IMU 是否在运动,陀螺都会感知到地球自转的角速度向量。关于这一点,初学者往往容易产生误解,忘记了地球自转角速度的存在。如果 IMU 轴线 (b 系)与当地水平坐标系 (n 系,即北-东-地)对齐,则此时陀螺测量的角速度向量为

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{n} = \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \begin{vmatrix} \omega_{e} \cos \varphi \\ 0 \\ -\omega_{e} \sin \varphi \end{vmatrix}$$
(3.10)

式中, ω_{e} 为地球自转角速度大小,数值为 7.292115147 ×10⁻⁵ rad/s; φ 为当地纬度。如 图3.16所示,假设 b 系与 n 系对齐,当 IMU 静置于赤道时,根据式 (3.10) 易知陀螺的理 论输出为 [ω_{e} 0 0]^T。同理,当 IMU 静止在北极点,陀螺的理论输出为 [0 0 $-\omega_{e}$]^T。

(2) 载体发生位移时的陀螺输出

如果搭载 IMU 的载体不再静止,而是相对地面有位移,且**假设每时每刻** b **系都与 当地的** n **系保持对齐**。由于地球表面是曲面,载体无论是向东运动产生东向位移还是 向北运动产生北向位移,实际上都是在做某种圆周运动,都会产生转动角速度,被称为 位移角速度 (transport rate),见第2章2.2.3小节。

如图3.17所示,如果载体沿地面向北移动,从地心地固坐标系(e 系)观察,载体 实际上沿着所在子午圈在做圆周转动,对应的角速度向量(ω_{φ})的方向为垂直于所在 子午圈向西,大小为纬度对时间的导数,即



图 3.17 位移角速度的分解示意图

根据图3.18,易得

$$\begin{split} \dot{\varphi} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{(R_M + h)\Delta t} \\ &= \frac{1}{R_M + h} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{R_M + h} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{V_N}{R_M + h} \end{split}$$
(3.12)

式中, v_N 为载体速度的北向分量, R_M 为载体所在位置的子午圈曲率半径, h 为椭球高。 ω_{φ} 在 n 系下的投影坐标为

$$\boldsymbol{\omega}_{\varphi}^{n} = \begin{bmatrix} 0\\ -\dot{\varphi}\\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ -v_{N}\\ R_{M} + h\\ 0 \end{bmatrix}$$
(3.13)

(3.11)



图 3.18 载体沿北向移动对应的位移角速度

同理,如果载体沿着地面向东移动,从地球坐标系下观测载体实际是沿着纬圈在做圆周转动,对应的角速度向量(用符号 ω_{λ})的方向与地球自转轴方向一致,与纬圈垂直,大小等于经度对时间的导数,即 $\dot{\lambda}$ 。根据图3.19,易得

$$\begin{split} \dot{\lambda} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{(R_N + h)\cos\varphi\Delta t} \\ &= \frac{1}{(R_N + h)\cos\varphi} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{(R_N + h)\cos\varphi} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{V_E}{(R_N + h)\cos\varphi} \end{split}$$
(3.14)

式中, v_E 为载体速度的东向分量, R_N 为载体所在位置的卯酉圈半径, φ 为纬度, h 为 椭球高。



图 3.19 载体沿东向移动对应的位移角速度

类比地球自转角速度向量在 n 系的投影,易得 ω_{λ} 在 n 系下的投影坐标为

$$\boldsymbol{\omega}_{\lambda}^{n} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}\cos\varphi\\ 0\\ -\dot{\lambda}\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{E}}{R_{N}+h}\\ 0\\ \frac{-v_{E}\tan\varphi}{R_{N}+h} \end{bmatrix}$$
(3.15)

此外,载体垂向移动不会造成载体相对地球的转动,因而不会引入相应的角速度。 载体在地球表面的位移都可以分解为北向、东向和垂向移动,前面两者会带来额外的 n 系相对于 e 系的角速度。那么陀螺感知到的 b 系相对于惯性系的角速度向量也应包含 两个角速度向量的合成,因此由于载体相对地球有位移而产生的角速度用符号 ω_{en} 来 表示,即位移角速度。

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm en} = \boldsymbol{\omega}_{\varphi} + \boldsymbol{\omega}_{\lambda} \tag{3.16}$$

将式(3.13)和式(3.15)代入式(3.16),可得 n 系下的位移角速度

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} \frac{v_{E}}{R_{N} + h} & \frac{-v_{N}}{R_{M} + h} & -\frac{v_{E} \tan \varphi}{R_{N} + h} \end{bmatrix}^{\top}$$
(3.17)

位移角速度,也可以理解为当地水平坐标系(n系)三个坐标轴的指向在近地面不同的位置上是不一样的,载体在近地面空间的位移造成了 n 系相对于 e 系的转动。

(3) 自由运动状态下的陀螺输出

载体的实际运动比上述特殊动作要复杂得多, 陀螺感知的角运动不仅有地球自转 角速度向量 ω_{ie} 和位移角速度 ω_{en} (以 n 系为参考系时), 同时载体还可以做姿态机动, 即 b 系相对于当地水平坐标系 (n 系) 有角运动, 对应的角速度记为 ω_{nb} , 例如飞机改 变航向、俯仰角和横滚角等。因此, 近地面自由运动状态下陀螺感知的角速度向量包含 以下部分:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}$$
 (3.18)

式中,角速度向量 ω_{ie} 和 ω_{en} 在已知载体位置和速度的情况下,可以计算其在 n 系下的投影坐标; ω_{nb} 是载体相对 n 系的角运动对应的角速度向量,当 INS 选择 n 系为参考坐标系时, ω_{nb} 是惯导姿态解算所需要的角速度向量。可以看出,当惯性导航解算选择的参考系为旋转坐标系而不是惯性坐标系时,陀螺无法直接测量载体相对于旋转坐标系的转动角速度,姿态解算时需要补偿旋转坐标系带来的"有害角速度"(见图3.15),例如地球自转角速度向量 ω_{ie} 和位移角速度 ω_{en} 。

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm nb} = \boldsymbol{\omega}_{\rm ib} - \boldsymbol{\omega}_{\rm ie} - \boldsymbol{\omega}_{\rm en} \tag{3.19}$$

具体的补偿方法和惯导姿态计算将在第6章的姿态更新算法中详细介绍。

3.5.3.2 加速度计观测

(1) 静置在地面的 IMU

静止放置在地面上的 IMU 相对地球的运动速度和加速度为零,但是相对于惯性空间的绝对运动加速度并不为零,因为 IMU 随着地球绕其自转轴旋转,受到地球自转产生的离心力的影响,对应的向心加速度¹¹为 $\mathbf{a}_{ib} = \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_{eb})$,如图3.20所示。根据惯导加速度计测量方程有:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}_{\mathrm{ib}} - \mathbf{g} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} imes (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} imes \mathbf{r}_{\mathrm{eb}}) - \mathbf{g}$$



图 3.20 万有引力加速度和重力加速度示意图

回顾大地测量学基础的地球重力加速度的定义[6],可知上式中的等号右边是地球重力加速度¹² \mathbf{g}_{p} 的反号,即 $-\mathbf{g}_{p}$ 。因此,此时三轴加速度计输出组成的比力向量为 $\mathbf{f} = -\mathbf{g}_{p}$ 。假设 b 系与 n 系对齐,则三轴加速度计输出的向量为:

$$\mathbf{f}^{\mathrm{b}} = \mathbf{f}^{\mathrm{n}} = -\mathbf{g}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -\mathrm{g} \end{bmatrix}$$

式中,标量g为当地重力加速度值。即IMU静止在地面上时,z轴加速度计敏感轴朝下,比力输出分量为-g。

¹¹可以类比圆盘实验,假设圆盘按恒定角速率 ω 旋转,距离转轴中心距离为 r 的点,其速度和向心加速度分别为 v = ω r, a = ω v = ω^2 r,这是一维运动的公式,而对于三维空间中的运动,加速度则对应于向量的叉乘运算。

¹²注意区分重力加速度和万有引力加速度。
(2) 做自由落体运动的 IMU

做自由落体运动的 IMU 相对于惯性空间的加速度向量由以下两个分量合成:一是随地球自转产生的向心加速度,二是相对于地球的重力加速度。因此,根据加速度计测量方程,此时的比力向量为

$$egin{aligned} \mathbf{f}_{\mathrm{ib}} &= \mathbf{a}_{\mathrm{ib}} - \mathbf{g} \ &= \left[oldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} imes (oldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} imes \mathbf{r}_{\mathrm{eb}}) + \mathbf{g}_{\mathrm{p}}
ight] - \mathbf{g} \ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(3) 一般情况

前面讨论的是两种特殊情况下的加速度计输出,实际的载体运动更加复杂。载体相 对于地球可以任意地加减速,也即相对于地球的运动加速度,其大小和方向都可能随意 变化,这部分是导航所关心的加速度分量。此外,由于地心地固坐标系(e系)相对于 惯性空间旋转,如果载体相对于地球有线运动,即速度不为零,将产生额外的哥氏加速 度 $-2\omega_{ie} \times v_{eb}$ 。如果选择 n 系为参考,则由于位移角速度 ω_{en} 的存在,还将引入对地 向心加速度 $\omega_{en} \times v_{eb}$,详见第6章6.3.2.3小节。

惯性导航所需要的加速度是载体相对于地球的运动加速度,为了得到这一加速度, 需要从加速度计的比力测量值中补偿重力加速度和哥氏加速度,因此哥氏加速度和重 力加速度被称作"有害加速度"。以 n 系下的惯性导航解算为例,导航所需的运动加速 度 **a**_{eb} 计算方程如下:

$$\mathbf{a}_{\rm eb} = \mathbf{f}_{\rm ib} + \mathbf{g}_{\rm p} - 2\boldsymbol{\omega}_{\rm ie} \times \mathbf{v}_{\rm eb} - \boldsymbol{\omega}_{\rm en} \times \mathbf{v}_{\rm eb}$$
(3.20)

哥氏加速度的计算将在第6章的惯导速度算法部分详细介绍。

3.5.4 惯性导航系统的类型

在第3章3.5.2小节解释二维平面上的 INS 工作原理时已经涉及了平台式惯导和捷联 式惯导的概念,主要是为了解决载体姿态变化的问题而形成了这两种不同的系统结构 和工作模式,如图3.21所示。平台式惯导通过一套框架机构(gimbal assembly)形成一 个空间指向稳定的机械平台,并将惯性传感器安装在上面,其中的三轴陀螺作为传感器 与框架机构一同保持该平台的轴向始终与选定的参考坐标系对齐,三轴加速度计在该 平台坐标系上测量载体运动的加速度参数,经过简单积分后获得载体速度和位置。捷联 式惯性导航系统,又简称捷联惯导,则直接将惯性传感器固定安装在载体上,利用计算 机建立一个虚拟平台(也称数学平台或计算平台),通过坐标变换的方式将惯性传感器 测量信号从载体坐标系转换到虚拟平台坐标系,并向外部输出参考坐标系下的载体运 动参数,从而实现惯性导航功能。

平台式惯导和捷联式惯导的导航功能和基本工作原理完全相同,其解算过程及误 差特性也基本一致。主要区别在于载体运动参数由载体坐标系到参考坐标系的转换方 式,平台式惯导由框架机构的硬件来物理实现,而捷联式惯导则由计算机的软件来虚拟



图 3.21 平台式惯导与捷联式惯导系统示意图 (根据参考文献 [23] 重绘)

实现。今天平台式惯导已经不常见,一般只在追求极致导航精度的应用场景中使用。但 是类似的空间稳定平台在生活中则并不罕见,例如无人机上用于拍照所用的云台就是 一个空间稳定平台。不管无人机如何摆动,相机能够一直稳定地指向固定的方向进行拍 照,只不过这种云台没有达到平台式惯导框架机构的精度罢了。

捷联式惯导由于没有平台式惯导那种复杂、精密的框架机构和配套的机电控制系统,因而相比平台式惯导有下列优点(详见表3.2):系统的体积、重量、功耗和成本显著降低;便于安装、维护和更换。但是由于捷联系统直接安装在载体上,其惯性传感器需要直接承受载体的角运动和加速度,因此其量程、带宽和比例因子、线性度等动态指标要求均比平台式惯导要高。基于以上优势,捷联惯导已被广泛应用于除超高精度领域以外的绝大多数导航定位领域[24, p.31]。

	平台式	捷联式
体积	相对较大	小
重量	重	轻
成本	高	低
精度性能	可达极限精度	一般最高到导航级
自标定能力	有	无
环境适应性	对冲击和振动敏感	抗冲击和振动

表 3.2 平台式惯导与捷联式惯导主要特点对比

3.5.5 惯性导航系统的特点和精度等级

惯性导航系统完全依靠自身的运动感知能力,在给定初始状态的情况下,只利用自 身惯性传感器的原始观测即可自主地推算载体的位置、速度和姿态等参数,完成导航任 务。惯性导航具备以下独特优点:

- 完全自主:惯导无需向外发射或接收信号,隐蔽性好,不受外界环境的影响。作为对比,GNSS必须接收卫星信号才能实现定位,容易被外界干扰,定位具有脆弱性。
- 可靠性高: 设备故障率低, 能够长时间连续工作。
- 导航信息丰富:能够提供位置、速度、姿态、角速度、加速度等多种导航参数。
- 动态性能好:采样率高(典型可到 200Hz 及以上),频带宽,动态跟踪和响应能力强。

然而,惯性导航解算是一个时间积分过程, INS 作为三维航位推算系统,与所有的 DR 系统一样,具有以下与生俱来的缺点:

- 导航精度随时间和距离发散,这是 INS 的主要缺点。
- 必须由外界提供初始位置和速度等初始化信息,否则无法启动。

惯性导航系统通常按照惯性传感器误差参数和 INS 自主推算的位置漂移误差来划 分其精度等级,见表3.3。由于陀螺零偏是影响 INS 长时间定位精度的最主要传感器误 差,所以按照陀螺的精度等级,一般将 INS 分为如下四个等级:战略级、导航级、战术 级和消费级。这些等级名称都带有很明显的军事背景,其应用范围也是与武器和军事装 备紧密相关的,这是因为惯性导航技术最早是为军事应用而研发的。

会粉	精度等级类别					
少奴 指标	战略级	导航级	战术级	消费级		
	strategic-grade	navigation-grade	tactical-grade	consumer-grade		
定位	~.30 m/h	$0.5{\sim}2$ nmi/h	$10{\sim}20$ nmi/h	_		
误差	/~30 111/11	(40万~80万元)	(5万~20万元)	(约 10 元)		
陀螺 零偏	$0.0001^{\circ}/{ m h}$	0.015°/h (约为地球自转角 速度的 1/1000)	$0.1{\sim}10^{\circ}/{ m h}$	_		
加速度 计零偏	1 mGal	$50{\sim}100~{\rm mGal}$	$100{\sim}1000~{\rm mGal}$	_		
应用 领域	洲际弹道导 弹、潜艇	航空、航海; 高精度测绘	短时应用(战 术武器);常与 GNSS 组合使用	手机等消费 电子产品		

表 3.3 惯导精度等级分类

战略级 (strategic-grade) 惯导,主要用于潜艇、洲际弹道导弹等战略武器的导航与制导。其典型的导航精度为:独立工作1小时,平面位置误差不大于30m;或者工作24小时不超过1.8km [2, p.119]; 陀螺零偏小于0.0001°/h,加速度计零偏小于1mGal。该等级的 INS 设备体积庞大、价值连城,大多数读者都无缘接触。

导航级(navigation-grade)惯导,又称航空级惯导,一般要求独立工作1小时水 平定位误差不超过1~2海里¹³。其陀螺零偏约为地球自转角速度大小的千分之一,即 0.015°/h,加速度零偏为50~100mGal。该等级的惯导常用于民用航空、全球范围的军 用航空器以及高精度的测绘设备,如移动测图等。导航级 INS 是目前民用领域所能接 触到的最高等级惯导系统,其价格约为40~80万元,但是随着我国惯导器件和系统制 造水平的快速提升,其成本和价格也在不断降低。

战术级 (tactical-grade) 惯导,一般仅能单独工作几分钟,主要用于导航时间较短的战术武器。但是如果和其他定位系统组合,比如 GNSS,就可以实现长时间的高精度导航定位。战术级 INS 的陀螺一般覆盖了从 0.1°/h 至 10°/h 的相当宽的精度范围。典型的战术级 INS 价格为 5 万~20 万元。

消费级(consumer-grade)惯导,是更低精度等级的可大规模量产的惯性导航系统, 一般是采用 MEMS 工艺制造的 IMU 模块或芯片。MEMS IMU 的精度、工艺等发展得 很快,目前没有统一的界定范围。这种批量生产的 IMU 大多未经标定,因此陀螺和加 速度计的常值误差往往非常大,需要在应用场景中现场标定或在线标定。今天典型的消 费级 MEMS IMU 芯片的价格仅在 10 元左右(约 1 美元)。

值得强调的是,表3.3的分类等级及其名称在业内尚未形成共识,即便按照陀螺零偏 误差进行划分,上述四个等级也没有完全覆盖现有陀螺的精度范围。对于 IMU 或 INS 来说,也并没有高精度、中等精度或低精度的统一界定。某个应用领域中所谓的中等精 度惯导,在另一个领域看来可能是高精度或低精度。

3.6 惯性导航技术简史

惯性导航技术涵盖了惯性器件、导航算法和系统设计等方面,其中惯性器件是基础。简要回顾惯性器件的历史,有助于理解惯性导航系统的基本原理和工作机制,并加 深对当前技术挑战以及未来发展趋势的认识。惯性技术的历史主要是一部陀螺仪的发 展史,因为陀螺仪的指向功能及其精度对惯性导航起着决定性的作用。本节按陀螺的出 现,各种陀螺的原理创立、制造技术的出现和发展成熟的顺序来简要回顾惯性技术的发 展历史。

传统的惯性器件以经典力学为理论基础。1687 年,**牛顿提出了三大力学定律及万** 有引力定律,为惯性技术提供了理论支撑。18 世纪五六十年代,欧拉深入研究转子陀 螺的动力学和稳定性后,提出了陀螺运动的基本方程,从而确立了机械转子陀螺仪的力 学基础。1852 年,物理学家傅科通过经典的"傅科摆"实验首次揭示了陀螺效应,即

¹³海里(符号: n mile, 简写为 nmi) 是一种国际度量单位。 $1 \text{nmi} \approx 1852 \text{m}$ 。

单摆的摆动平面在空间中保持恒定,不会因平台旋转而改变。基于这一发现,傅科设计 并构建了第一台试验陀螺仪,并将其命名为 Gyroscope (陀螺)¹⁴。1908 年,安舒茨 (Anschutz) 成功研制出世界上首台摆式陀螺罗经,它能为导航提供方向基准。1910 年, 舒勒设计了一种带有垂直安装系统的仪器,能够确立精确的垂直基准。他将其周期调整 为 84.4 分钟,这一创新被称为"舒勒调谐"。通过舒勒调谐,人们开发出了对载体加速 度不敏感的定向仪,特别适用于航海导航。20 世纪初,Sperry 发明了一种可靠的陀螺 仪,并将其应用于鱼雷技术。上述理论的提出和技术上的进步奠定了整个惯性技术发展 的基础。

从 20 世纪 40 年代现代火箭技术发展的初期开始, 惯性技术的研究从惯性仪表扩展 到惯性导航系统的研制和应用。20 世纪上半叶, 提出了惯性导航系统的基本概念, 博伊 科 (Boykow) 发现, 利用加速度计和陀螺仪可构建一个完整的惯性导航系统。但那时惯 性传感器的品质还不足以生产和演示这样一种系统。第二次世界大战期间, 德国制造的 V-2 火箭采用了陀螺仪和加速度计组成的惯性制导系统, 开创了惯性导航系统应用的 先河, 但由于当时工程技术水平的制约, 陀螺和加速度计的设计和制造相对粗糙, 器件 误差大, 制导精度很低。到 20 世纪 50 年代, 美国麻省理工学院德雷伯实验室 (Charles Stark Draper laboratory) 采用液浮支承, 成功研制了单自由度液浮转子陀螺, 有效降 低了支承引起的摩擦力矩, 使陀螺精度达到了导航级惯导的要求, 并获得成功应用。与 此同时, 力反馈原理应用到加速度计的检测质量块上, 从而产生了一种精确的加速度敏 感仪表。这一时期, 由于冷战的压力, 世界各国对惯性导航技术的研究异常活跃, 争先 恐后地研制新型惯性敏感器并改进其精度。在 1949 年的出版物中首次提出了提联惯性 导航的概念; 在技术实现方面, 为减少转子陀螺仪的转子支承的摩擦与干扰, 挠性、液 浮、气浮、磁悬浮和静电等支承悬浮技术被逐步采用; 1960 年激光技术的出现为光学 陀螺, 包括激光陀螺 (RLG) 和光纤陀螺 (FOG) 的实现和发展提供了技术支撑。

随着科学技术的不断进步,除了基于牛顿运动定律的机械陀螺之外,人们逐渐发现 了更多可用于测量相对于惯性空间的旋转的物理规律和现象。其中,基于萨格纳克效应 的光学陀螺便是一个典型的例子。光学陀螺以其独特的技术原理和优越的性能在陀螺 技术家族中独树一帜。

1913年,法国物理学家萨格纳克(M. Sagnac)通过实验演示了即使在没有机械运 动部件的光学系统中也能检测相对于惯性空间的旋转。然而,这种初步的验证远未达到 作为实用旋转速率传感器的标准,其灵敏度极为有限。到了1925年,迈克尔逊(A.A. Michelson)和盖尔(Gale)利用一个近2千米周长的大型环形干涉仪,成功提高了灵敏 度并测量了地球的自转速度。然而,由于观测装置难以小型化,萨格纳克效应在很长一 段时间内仍然是作为一种物理现象来研究。1962年,罗森塔尔(Rosenthal)提出使用环 形激光腔体,通过在闭合的谐振路径中多次循环反向传播的波,这相比原始的萨格纳克 干涉仪中的单次传播成倍地提升了旋转检测的灵敏度。这一创新在1963年首次由马塞

¹⁴傅科以希腊词汇 "gyro" (旋转) 和 "skopein" (观察) 结合创造了 "gyroscope" 这一术语,用以描述这种仪器能够在高速旋转中由于惯性作用使其旋转轴始终指向固定方向。

克(Macek)和戴维斯(Davis)完成实验验证。20世纪80年代初环形激光陀螺(RLG) 正式商用,至今已经发展至成熟阶段,成为惯性导航领域中的主要陀螺类型之一。光纤 陀螺的出现比激光陀螺稍晚一些。1967年,Pircher 和 Hepner 提出使用多圈光纤环通 过多次循环来增强萨格纳克效应,并在1976年由 Vali 和 Shorthill 进行了实验验证。光 纤陀螺(FOG)由于其全固态特性所带来的独特优势,以及较低的技术门槛,一经问世 就吸引了大量的关注,并得到了迅猛的发展。与 RLG 相比,FOG 的体积更小,功耗更 低,价格低廉且便于批量生产。

微惯性器件的技术研究始于 20 世纪 90 年代初,其出现标志着惯性技术的一次重 要革新。微惯性器件利用 MEMS 技术,由硅、石英和金属等材料通过微机械加工工艺 制造陀螺和加速度计。与传统器件相比,微惯性器件成本显著降低,同时其体积、重量 和功耗也大为减小,并具有大规模生产、高可靠性、可将感知结构与电路单片集成等多 种优势。随着应用规模的扩大,微惯性器件百花齐放,其性能也在持续提升。MEMS 惯 性器件在中低端需求领域有着非常广阔的应用前景[25]。

在冷战时期,惯性导航系统经历了从初期笨重、昂贵、高功耗的系统逐渐转变为轻 巧、便宜、低功耗的现代化进程。这种迅速的技术演进主要得益于冷战期间以美国和苏 联为代表的东西方阵营在武器系统方面的巨量资源投入和由此带来的飞速发展。这样 的技术进步令人瞩目,仅仅在几十年的时间里,这样一个涉及机械、电子和光学高度整 合的复杂高精度系统就能够实现迅猛的发展,其进展速度可与同期计算机技术的发展相 媲美。正因如此,惯性技术可以作为人类科技发展的结晶供大家观摩,读者朋友们(尤 其是青年学生)可以把它作为快速攻克复杂问题的一个范本,举一反三,将其中很多巧 妙的研究思路和极致的技术方法借鉴到自己今后的科研工作中。

3.7 惯性导航技术的典型应用

惯性导航技术既古老又年轻。一方面,它的理论源头可追溯至牛顿时代,首次严格 意义上的工程应用则始于"二战"期间。另一方面,这门技术的持续创新与发展,使其 始终保持在科技发展的前沿。惯性技术是人类智慧的结晶,**展现了工程技术的极致成** 就。

惯性技术从最初笨重、昂贵的实验室原型系统,经过几十年的持续创新,至今已发 展至芯片级尺寸和"白菜价",被越来越多的消费电子产品采用。惯性导航技术的神秘 面纱也被逐渐揭开,变得日益为人所熟知。其应用广泛,无所不在,从航空航天、军事 国防到消费电子、自动驾驶等领域都有其身影。如今,几乎无法穷尽其广泛的应用场景, 而其未来的应用领域和潜力则仍取决于我们的想象力。未来"万物互联"的世界很可能 会形成一个"有运动就有惯导"的局面。下面,从传统的武器装备和航空航天、工业生 产和日常生活等方面来简要介绍惯性导航技术的典型应用。

3.7.1 军事应用

惯性技术在军事领域中的应用历史悠久。从"二战"时期的德国 V-2 火箭开始, INS 为潜艇、导弹、飞机、坦克和无人飞行器等各类武器装备提供至关重要的导航制导能力, 提升了武器系统的作战效率与战场生存能力。面向现代信息化战争的需求,常规武器的 制导化、制导武器的小型化已成为必然趋势。制导化的常规武器不仅能显著提升其命中 精度,还能显著减少弹药消耗、避免误伤,作战效能提高数倍。随着数据网络和转换技 术的持续发展,导航、制导与控制系统正从单一的智能化平台转向更为高效的分布式系 统。在这一变革中,轻巧、结实、性价比高的 MEMS 惯性元件起到了关键作用,其小 型化设计和可扩展性使得 MEMS 惯导在军事应用中的重要性日趋凸显。

在航空航天领域,惯性导航系统为飞机和无人机等飞行器提供姿态控制、自主导航和定位能力。在航天领域,1957年,苏联发射的世界上第一颗人造地球卫星就是利用基础的惯性导航技术进行导航和控制。此后,随着太空探索事业的不断发展,惯性技术的应用领域也得到了进一步的拓展,广泛应用于运载火箭飞行,卫星和飞船姿态控制、入轨、变轨等任务中,成为现代航天领域不可或缺的关键技术。

3.7.2 专业应用

随着惯导成本的降低,尤其是光学陀螺的出现和发展,惯性导航技术和惯性传感器 在许多专业领域得到了广泛应用,包括移动测图、地下空间自主定位定向、工程测量、 井孔勘探等。

在移动测图应用中,一般使用战术级或导航级惯导与 GNSS 组合,配上组合导航数据后处理软件,构成一套精密定位定姿系统 (POS)。该系统为移动测图系统中的摄影测量相机或激光扫描雷达 (LiDAR)提供精确的位置、姿态和其它运动参数。POS 和移动测图系统通常被固定安装在车载和机载平台上,广泛应用于地形测绘与地图数据采集、移动激光扫描 (MLS)、航空摄影与遥感等领域。

在地下空间自主定位应用中,例如长输油气管道长期运营后需要定期检测其管道内部的病害并确定病害发生的位置,为此,在管道内部检测设备(如机器人)中安装战术级或导航级惯导系统,结合里程计为检测设备提供推算定位信息,并沿着管道每隔 500或 1000米引入一个地面坐标修正点来改正惯导推算的累积误差。类似的,在城市基础设施管理和维护中,地下管道的准确定位和测绘至关重要。由于地下管道通常被泥土覆盖,传统 GNSS 技术在这些环境中可能受到限制或无法使用。通过设计一个测量装备,集成了惯性传感器和里程计等,让测量设备穿管而过,并在管道入口和出口处提供位置修正,最终通过组合导航处理得到测量设备的运动轨迹,从而推算出地下管道的三维位置信息。

惯性导航技术近十年来也被用于精密工程测量,实现特定工程结构的亚毫米和毫 米级变形测量。例如,将导航级惯导与里程计或 GNSS、全站仪组合来实现高铁轨道几 何变形的移动测量;将导航级惯导与里程计组合,用以监测大坝内部垂向位移和测量道 路的平整度。这些应用本质上是将惯导精确的姿态测量反演为被测结构微小的几何形 变测量。惯性导航技术在工程测量领域的应用仍在进一步拓展,惯导或组合导航技术利 用其强大的相对测量能力往往能解决一些传统测量手段不能解决或不好解决的工程测 量问题,并实现测量效率的显著提升。

在井孔勘探中,惯性导航技术是关键的定位和引导工具。这种技术通过内置的惯性 传感器测量勘探设备在空间中的加速度和角速度,从而准确地跟踪设备在井孔内的位 置和方向。由于井孔环境复杂、狭窄封闭,传统的 GNSS 或其他外部定位手段往往难以 发挥作用。惯性导航技术能够独立地为勘探工程师提供实时的三维位置和方向信息,确 保井孔设备能够精确地定位定向并准确地完成预定勘探任务。这种高精度和实时导航 定位系统是井孔勘探中不可或缺的,有助于提高勘探效率,降低操作风险,并确保勘探 数据的准确性和可靠性。

3.7.3 日常应用

随着 MEMS 惯性器件日趋成熟,惯性技术在日常生活中的应用数不胜数,这里仅 列举几个典型案例。

在汽车驾驶方面,随着汽车工业的发展,尤其是面向自动驾驶和辅助驾驶需求,汽车的电子化程度越来越高,其导航定位、辅助操控和主动安全等功能都大量用到惯性器件。由于汽车属于大规模生产的消费品,要求惯性器件的成本低、尺寸小、可靠性高。 而微惯性器件恰恰拥有这几方面的优势,因此 MEMS 陀螺仪和加速度计已经广泛应用 于先进的汽车电子产品中。车辆导航对 MEMS 惯性器件的要求比武器装备的要求低得 多。在自动驾驶方面,惯性导航主要结合其它定位手段(如 GNSS)一起提供高精度的 定位和导航信息,使得自动驾驶系统能够精确控制车辆的加减速、转向和稳定性,确保 车辆在复杂、动态的交通环境中安全、高效地行驶。

在医疗健康方面,MEMS 惯性传感器能用于对肢体运动的监测和分析,为肢体运动功能做评估。例如,肢体运动功能评价是脑卒中及脊髓型颈椎病康复治疗的主要依据。肢体运动的动态监测与其他生理参数传感器相结合,还可以进行相关生理疾病的监测和诊断。

在消费电子方面,随着 MEMS 技术的迅猛发展,MEMS 惯性技术在消费电子领域 实现了快速、广泛的应用,走进人们的日常生活,具体包括掌上电脑、手机等电子设备 的运动检测。消费电子厂商不断寻求具有新异功能的产品,把运动感知和导航定位等 功能加载到游戏机、智能移动终端、数码相机、电视远程控制、运动和健身等电子设备 中。例如游戏机中的惯性手柄操控、遥控飞机的飞行控制、相机的光学防抖、平衡车的 稳定控制,甚至将 MEMS 惯性传感器用于足球运动员的球鞋中以感知和分析其运球动 作、射门力度以及场上奔跑轨迹,并据此增强训练效果。

总之,惯性技术的应用范围已经极为广泛,且随着技术的发展,其应用领域还会不断扩展。惯性技术的未来应用将取决于我们的创造力和想象力。

第4章 惯性传感器误差与标定

4.1 引言

惯性传感器是一种精密的仪器仪表,能够在长时间的积分运算后仍保持一定的导 航定位精度。然而,任何物理器件都会存在误差,包括加速度计和陀螺仪的零偏误差、 比例因子误差、交轴耦合误差、非线性误差以及随机噪声等,这些误差会在惯性导航算 法的积分过程中逐步累积。为保证导航精度,需要仔细研究惯性传感器的误差,做到分 类细致、建模准确、测试充分,而且标定和补偿更要非常精细。本章将对这些方面进行 详细介绍。

惯性传感器的误差多样且复杂,既包含高频随机噪声,又有中低频的零偏不稳定性 等多种频段和类型的随机误差。对它们进行细致分类是传感器测试标定、惯导系统误差 建模和误差传播分析的基础。本章4.2节详细介绍了陀螺和加速度计的主要误差,并在 此基础上给出了 IMU 的测量误差模型,该模型是后续组合导航系统中误差状态方程的 一部分,以实现误差的在线估计和补偿。

在实际应用中,我们希望能够识别惯性传感器测量误差这一随机信号中的误差类型 并确定其模型参数。这属于系统辨识与参数估计范畴,需要用到随机信号分析工具。本 章4.3节介绍了惯性导航领域中常用的随机过程分析和建模工具——Allan 方差。Allan 方差是一种用于分析时间序列中随机过程模型的统计方法,能够有效描述误差时间序 列在不同时间尺度上的波动特性,尤其在中长期缓变随机波动的定量描述与分析中表 现突出。这类误差对惯性导航积分解算中的漂移误差影响最大,也是惯性器件误差分析 的重点。

惯性传感器的误差名称缺乏统一标准和惯例,这对理解其性能指标造成了一定困扰。尽管相关领域的学术团体曾尝试通过制定标准来统一惯性导航术语,但这些标准尚未得到广泛应用和执行。为此,本书将在本章4.4节中通过实例说明如何解读典型惯导产品手册中的各项参数,希望借此澄清一些因术语不统一而引发的困惑。本章最后介绍了 IMU 误差标定的基本原理,包括加速度计的静态六位置法标定和陀螺的两位置法角位置标定。首先通过静态两位置法来直观地解释其标定原理,然后扩展到六位置法标定。掌握这一基本原理后,读者就具备了进一步学习更复杂标定方法的理论基础。

4.2 惯性传感器误差

惯性传感器误差的类型总体上可以粗略地分为静态误差和动态误差。静态误差 (static error),是当传感器的输入为零时(称作"静态"¹)就能表现出来的误差,也

¹严格来说,静态并不是指载体相对地面静止,因为该情况下陀螺和加速度计的输入并不为零。文中静态和动态误差这一分类术语在业内也没有统一,国内学者也用静态误差特指跟比力相关的误差,而用动态误差表示跟角速度相关的误差。

称加性误差或零偏类误差。动态误差(dynamic error),是只有当传感器输入不为零时(称作"动态")才能表现出来的误差,也称乘性误差,因为它与惯性传感器的输入相乘 才表现为输出的角速度或比力的测量误差。

如果从误差随机特性的角度来看,惯性传感器误差又可以分为噪声类误差(random noise)和非噪声类误差,如图4.1所示。噪声类误差表现为时间上的强随机性,相邻历元间的相关性弱,主要包括高频随机噪声和量化噪声等。噪声类误差随机性强,无法进行实验室标定和在线估计。非噪声类也称系统性误差(systematic error),在时间上有相关性而不是完全随机的,往往能够对其进行实验室标定或在工作过程中(例如在组合导航滤波器中)进行在线估计和补偿。系统性误差包括零偏误差、比例因子误差、交轴耦合误差和非线性误差等。然而,误差的随机性和确定性之间并没有严格的界限,如果误差的频段远高于导航系统所关心的频段则可以将其看作噪声类误差来处理;相反,若接近或低于导航系统关心的频段,则可归类为系统性误差。



图 4.1 惯性传感器误差的分类

系统性误差进一步细分,都包含四个不同的成分:常值项、随温度变化项、逐次上 电启动项和上电期间变化项[2, p.151]。常值项是传感器自生产出来就带有的常值误差部 分,是"与生俱来"的,每次开机都一样,由 IMU 内置处理器根据生产环节的内场标 定结果对其进行补偿。随温度变化项是指传感器误差参数随温度变化的部分,包括可重 复温漂和不可重复温漂,其中的可重复温漂也可以结合内场标定的温漂参数进行补偿, 这种温漂标定流程的设备成本和时间成本都不低。误差的逐次上电启动项变化表现为 每次上电都不同,但在一次上电后保持不变的误差,也称逐次上电重复性。上电期间变 化项是在一次上电工作过程中误差缓慢变化的部分。

另外还有一些与惯性传感器内部工作机理有关的深层次误差项,例如高频振动干 扰造成的额外误差,陀螺的加速度敏感性等,本书不做详细介绍。在惯性导航误差传播 分析或组合导航算法设计中,需要选用合适的随机过程对各类误差的不同成分进行建 模,其中,噪声类误差一般用高斯白噪声或均匀分布噪声描述;其它系统性误差一般需 要考虑其时间相关性,选择随机常数、随机游走或一阶高斯马尔可夫过程进行建模。一 般情况下,逐次上电重复性误差和上电期间变化项可以在组合导航过程中进行实时在 线估计和补偿。

4.2.1 零偏误差

零偏(bias),又称零偏误差或零位偏置,是指当输入信号为零时,惯性传感器所显示的输出量中相对稳定的部分(以区别于传感器噪声),如图4.2所示。零偏与惯性传感器实际感知的比力和角速度无关,因而被归类为静态误差。三轴陀螺和加速度计零偏通常表示为

$$\mathbf{b}_{g} = \begin{bmatrix} b_{g,x} \\ b_{g,y} \\ b_{g,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{a} = \begin{bmatrix} b_{a,x} \\ b_{a,y} \\ b_{a,z} \end{bmatrix}$$
(4.1)

式中, b_{g,x}、b_{g,y} 和 b_{g,z} 分别表示 x、y 和 z 轴的陀螺零偏, b_{a,x}、b_{a,y} 和 b_{a,z} 分别表示 x、y 和 z 轴加速度计零偏。



图 4.2 传感器"输入-输出"关系:零偏误差

对于加速度计而言,在与输入加速度或转动无关的规定工作条件下[26],规定时段 内记录的平均读数即为零偏,单位为 m/s²、μg 或 mGal 等。对于陀螺仪,在与输入转 动或加速度无关的规定工作条件下,在相同时间段内记录的平均读数即为零偏,其单位 一般为 rad/s、deg/s 或 deg/h。在大多数情况下,零偏是惯性传感器误差的最重要成 分。零偏的成分比较复杂,既包括常值项,也包含系统变化项和随机变化项,例如常值 零偏、零偏重复性、零偏稳定性和全温零偏误差等。

4.2.1.1 常值零偏

常值零偏(constant bias),指惯性传感器在出厂时固有的且恒定不变的零偏部分。高精度的惯性传感器,其常值零偏通常在出厂时已精确标定并补偿到较低水平,因此在 其规格参数中通常会特别标注。然而,对于低成本的 MEMS 传感器,例如价格在 10 元 人民币以下的手机内置芯片级惯性传感器,由于成本限制和大规模生产的需要,难以逐 个进行精确标定和误差补偿。因此,这类 IMU 在使用过程中往往存在较大的常值零偏 (例如达到 1°/s 量级)。尽管这一误差值在数值上较为显著,但在实际应用中,通过因 地制宜的现场标定或适当的算法处理,可以有效地消除大部分常值零偏。例如在系统启 动时利用几秒钟的静态陀螺数据求平均,能较为准确地估计陀螺的常值零偏,可作为对 陀螺常值零偏的粗略估计。值得注意的是,加速度计的常值零偏不能通过静态数据取平 均进行估算,因为对于静止的 IMU,重力加速度会在三轴加速度计上有投影,此时无 法区分是加速度计零偏还是由于 IMU 没有水平放置导致的重力加速度投影。

4.2.1.2 零偏重复性

零偏重复性(bias repeatability),全称为零偏逐次上电重复性(run-to-run bias repeatability),是惯性传感器的经典性能指标之一,用以衡量在相同条件、不同次上电启动时零偏的不一致程度。具体测量方法为:在相同的条件下,并在规定的时间间隔内(确保传感器断电后充分冷却),对惯性器件进行多次上电操作,并记录每次上电稳定后的零偏值,然后统计零偏相对其均值的离散程度,以标准差来表征零偏的重复性[26]。对于高性能惯性传感器,由于在出厂时已经对常值误差和温漂误差等主要误差成分进行了精确标定补偿,因此零偏逐次上电重复性这一数值相对较小的次要零偏成分变得不可忽略。

4.2.1.3 零偏稳定性

零偏稳定性 (bias instability),严格来说应称为单次上电零偏不稳定性 (in-run bias instability),该指标反映了器件在上电稳定后零偏随时间缓慢变化的特征。当输入为零时,它用来衡量陀螺或加速度计输出值围绕其均值的波动程度。零偏不稳定性参数的测算方法分为两种:

- (1) 我国的国家军用标准(国军标)[26]定义的零偏不稳定性:通过采集几个小时的 静态数据,每10秒或100秒求一次平均值(以抑制器件白噪声的影响),然后 统计这些平均值的标准差。
- (2) Allan 方差定义的零偏不稳定性:采集足够长时间的静态数据(一般大于 10 小时,越高等级的器件所需时间越长),绘制原始数据的 Allan 方差曲线,并取曲线谷底的数值。

国军标定义的零偏不稳定性参数对评估 INS 的实际定位定姿性能具有重要的现实 指导意义。相比之下, Allan 方差曲线的谷底数值则更多地反映了器件在极端理想条件 下的性能极限,对于实际应用的意义相对较小。从数值上看,国军标指标通常比 Allan 方差指标大几倍,甚至高出一个量级。国内部分同行将国军标指标称为"零偏稳定性", 而将 Allan 方差指标称为"零偏不稳定性",以示区别。然而,笔者认为这种表述在文 字上可能会使初学者和 INS 用户感到困惑,因为"稳定性"通常与"不稳定性"相对。 为了减少这种混淆,更倾向于将它们看作"零偏不稳定性指标"的两种指标参数。

4.2.1.4 全温零偏误差

全温零偏误差(bias error over temperature),也称为零偏的温度敏感系数(或称 温漂系数),反映器件参数的温度敏感性,描述了惯性器件参数随温度的变化情况。具 体来说,它是陀螺零偏在其额定工作温度范围内相对于室温零偏值的变化量。对于传统 高精度的惯性器件,通常会对 IMU 逐个进行温漂补偿,全温零偏误差即补偿后的残余 误差。而对于低端 MEMS 芯片,由于成本和生产规模的限制,不可能对每个芯片进行 温漂标定和补偿,因此其全温零偏误差可能较大。在这种情况下,制造商通常仅提供零 偏的温度敏感系数(例如 0.01°/s/°C),以便用户了解其温漂特性。

4.2.2 比例因子误差

比例因子(scale factor)又称标度因数,定义为惯性传感器输出变化量与输入变化 量的比值,即惯性传感器输入输出统一单位之后,输出-输入直线的斜率,如图4.3所示。 比例因子误差(scale factor error)是指惯性传感器的实际比例因子与理想比例因子之 间的差异。比例因子误差是一种乘性误差,例如由加速度计比例因子误差导致的加速度 计输出误差,与该敏感轴方向的真实比力成正比。同样,由陀螺比例因子误差导致的陀 螺输出误差,与绕该敏感轴的真实转动角速率成正比,表示如下:



图 4.3 传感器"输入-输出"关系:比例因子误差

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \\ \delta \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \\ \delta \mathbf{f}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}_{\mathrm{SF}} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{s}_{\mathbf{a},\mathbf{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \delta \mathbf{s}_{\mathbf{a},\mathbf{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \mathbf{s}_{\mathbf{a},\mathbf{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$
(4.2)
$$\begin{bmatrix} \delta \omega_{\mathbf{x}} \\ \delta \omega_{\mathbf{y}} \\ \delta \omega_{\mathbf{y}} \\ \delta \omega_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}_{\mathrm{SF}} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{s}_{\mathrm{g},\mathbf{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \delta \mathbf{s}_{\mathrm{g},\mathbf{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \mathbf{s}_{\mathrm{g},\mathbf{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\mathbf{x}} \\ \omega_{\mathbf{y}} \\ \omega_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$
(4.3)

式中, $\delta s_{a,x}$ 、 $\delta s_{a,y}$ 和 $\delta s_{a,z}$ 分别为 x、y、z 轴加速度计的比例因子误差, f_x 、 f_y 和 f_z 分 别为 x、y、z 轴加速度计的真实输入比力, δf_x 、 δf_y 和 δf_z 分别为 x、y和 z 轴加速度 计比例因子误差造成的比力测量误差。同理, $\delta s_{g,x}$ 、 $\delta s_{g,y}$ 和 $\delta s_{g,z}$ 分别为 x、y、z 轴陀 螺的比例因子误差, ω_x 、 ω_y 和 ω_z 为对应的陀螺真实输入角速度, $\delta \omega_x$ 、 $\delta \omega_y$ 和 $\delta \omega_z$ 为 陀螺比例因子误差造成的角速率测量误差。

比例因子没有量纲,通常以百分比(%)或百万分之一(ppm)表示。例如,比例因 子误差为 +1 ppm 时,表示实际的比例因子将比理想的比例因子大 1.0×10⁻⁶。比例因 子误差可以通过标定和补偿来减小,从而提高 INS 的性能。比例因子误差也是一个包 含多种成分的误差源,并不总是表现为常值,而是与零偏误差类似,可能包含非线性、 不对称性以及逐次上电不重复、随时间变化等复杂的误差成分。然而,实际应用通常并 不关注这些比例因子误差的细分成分。原因在于,某些快速变化的比例因子误差在导航 过程中可能因正负相抵而对导航精度影响较小,或是表现为类似常值误差的影响而被 合并考虑。

4.2.3 交轴耦合误差

交轴耦合误差(cross-coupling error 或 misalignment error)是由于惯性传感器的 敏感轴与 IMU 坐标系的正交坐标轴之间不对准所引起的,有时也称为非正交(nonorthogonality)。如图4.4所示, IMU 坐标系(即 b 系)是一个严格正交的直角坐标系, 是 IMU 比力和角速度原始测量值的投影坐标系。在理想情况下,加速度计和陀螺的敏 感轴应与 b 系的 3 个轴完全对齐。然而,在 IMU 的制造过程中,由于加工精度和工艺 的限制,例如三轴陀螺或三轴加速度计的敏感轴不可能完全无误差地对齐到预设的轴 线上,从而导致加速度计和陀螺的敏感轴与 b 系坐标轴之间存在夹角。这种不对齐使 得每只加速度计都会或多或少地敏感到与其敏感轴正交方向上的比力分量,而每个陀 螺则会测量到与其敏感轴正交方向上的角速率分量。这种误差效应称为交轴耦合误差, 也会影响导航系统的性能。

如图4.4所示,以 z 轴加速度计为例,由于存在交轴耦合误差,实际的 z 轴加速度 计(请注意,这里指的是按照设计应该安装在 b 系 x 轴方向上的加速度计,实际略有 偏差)会敏感到 b 系 x 轴向上的比力,其大小为 x 轴方向上输入比力与对应交轴耦合 系数的乘积。其中,m_{a,zx} 表示 z 轴加速度计对 b 系 x 轴比力的敏感系数(交轴耦合)。 同理,m_{a,xz} 表示 x 轴加速度计对 b 系 z 轴比力的敏感系数(交轴耦合)。一般情况下,



图 4.4 交轴耦合误差示意图(以 z 轴加速度计为例)

m_{a,zx} ≠ m_{a,xz}。因此,对于一个 IMU 里面的三轴加速度计组合来说,其交轴耦合误差系数一般包含 6 个独立分量 m_{a,xy}, m_{a,xz}, m_{a,yz}, m_{a,zx}, m_{a,zy}。交轴耦合误差是一种乘性误差,对于名义上三轴正交的加速度计组合而言,交轴耦合误差导致的测量误差表示为

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \\ \delta \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \\ \delta \mathbf{f}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}_{\text{cross coupling}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{xy}} & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{xz}} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{yx}} & 0 & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{yz}} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{zx}} & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{zy}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$
(4.4)

同理, 陀螺交轴耦合误差导致的角速度测量误差表示为

$$\begin{bmatrix} \delta \omega_{\mathbf{x}} \\ \delta \omega_{\mathbf{y}} \\ \delta \omega_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}_{\text{cross coupling}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{m}_{g,\mathbf{xy}} & \mathbf{m}_{g,\mathbf{xz}} \\ \mathbf{m}_{g,\mathbf{yx}} & 0 & \mathbf{m}_{g,\mathbf{yz}} \\ \mathbf{m}_{g,\mathbf{zx}} & \mathbf{m}_{g,\mathbf{zy}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\mathbf{x}} \\ \omega_{\mathbf{y}} \\ \omega_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$
(4.5)

与比例因子误差相似,交轴耦合误差也没有量纲,通常以 ppm (百万分之一)或百 分比(%)来表示。初学者可能会认为三轴传感器的交轴耦合误差应该只有三个参数。 要正确理解这一点,需要明确那套名义上正交的 IMU 坐标系,即 b 系。在这个坐标系 中,三个轴向是严格正交的。在系统集成时,三轴传感器的实际敏感轴方向应与 b 系的 三轴对齐,但实际上各轴都很难与名义轴实现严格对齐,每个实际敏感轴都会与另外两 个正交轴有偏离正交的小夹角,3×2=6。

高精度惯性导航系统在出厂前会进行交轴耦合误差的标定和补偿,以减小其对导 航精度的影响。经过标定和补偿后,这些系统的残余误差通常较小,影响有限。然而, 对于一些未经标定的消费级 MEMS IMU,交轴耦合误差可能达到 2% 的水平,这在某 些应用场景中会对导航性能产生显著影响。为此,需要在线估计这些交轴耦合误差,以 便在导航算法中进行补偿,从而提高导航系统的整体性能。

4.2.4 随机噪声

随机噪声一般指传感器误差的高频成分,在时域上表现为数值随时间的不规则变 化,即相邻采样点之间不表现出相关性,因此完全无法被标定和补偿,只能对其影响进 行分析。对于惯性传感器而言,随机噪声的成因复杂多变。例如,传感器的内部敏感结 构和电路元件的热噪声;在测量过程中,传感器受到外部震动的干扰,导致测量结果出 现随机波动;激光陀螺为了克服闭锁效应而做的机抖,在补偿了随机抖动之后的残余项 也会产生噪声[17, p.121]。在所有惯性传感器测量数据中,随机噪声普遍存在。在 IMU 的每次采样输出中,三轴陀螺仪和加速度计的随机噪声可以抽象为一个随机噪声向量, 记作

$$\mathbf{w}_{g} = \begin{bmatrix} w_{g,x} \\ w_{g,y} \\ w_{g,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{a} = \begin{bmatrix} w_{a,x} \\ w_{a,y} \\ w_{a,z} \end{bmatrix}$$
(4.6)

在工程应用中,随机噪声通常被建模为零均值的高斯白噪声。白噪声是最基础、最 纯粹的随机过程,仅用功率谱密度(PSD)即可完整描述其特性,其 PSD 为常值,具 有无限的带宽,造成无限的功率(即 PSD 曲线下的积分面积无限大),如图4.5所示。理 想白噪声在现实世界中并不存在,实际物理系统的噪声总是有限带宽和有限功率的,即 带限白噪声:PSD 函数值在特定的频段内保持恒定不变,超出该频段则逐渐衰减。理 想白噪声实际上是物理系统在感兴趣频段上的平直功率谱的一种理想化外推,这种模 型仅在结合有限带宽的信号处理系统时才具有实际的应用价值[27]。例如,在普通车载 导航系统中,通常关注的车辆运动的频段是 10Hz 以下。如果在该频段内,惯性传感器 的随机误差 PSD 曲线近似为常数,那么将其随机噪声视为白噪声模型是恰当的。相反, 如果被测信号的频段超出了传感器带限白噪声的频段范围,那么这种随机误差就必须 被视为有色噪声,即非白噪声。





白噪声 PSD 的单位是

$\frac{(单位信号)^2}{H_7}$

通常使用 PSD 的平方根来表征,称为谱密度(而不是功率谱密度),这样更简洁直观。加速度计随机噪声谱密度的常用单位是 $m/s^2/\sqrt{Hz}$ 、 $mGal/\sqrt{Hz}$ 、 $m/s/\sqrt{h}$; 陀螺随

机噪声谱密度的常用单位是 rad/s/√Hz、deg/s/√Hz、deg/√h,这些单位之间是可以相 互转换的,以陀螺随机噪声的单位为例:

$$1^{\circ}/s/\sqrt{Hz} = \frac{1^{\circ}}{s\sqrt{Hz}} = \frac{1^{\circ}}{s\sqrt{\frac{1}{s}}} = \frac{1^{\circ}}{\sqrt{s}}$$
$$= \frac{1^{\circ}}{\sqrt{\frac{1}{3600}h}} = 60^{\circ}/\sqrt{h}$$

陀螺和加速度计的随机噪声通常也分别被称为角度随机游走 (angular random walk, ARW)和速度随机游走 (velocity random walk, VRW)。随机游走是白噪声积分的结果, 惯性导航解算是一个时间积分过程, 陀螺角速率输出中的噪声经积分后, 表现为姿态角的随机游走误差 (即 ARW); 加速度计输出的比力测量噪声积分后, 则会产生速度的随机游走误差, 如图4.6所示。初学者可能会对这两个概念感到困惑, 需要明确的是, 这里的噪声和随机游走实际上是对同一误差源在不同层面 (即原始信号和导航解算结果)的不同称呼。在惯性传感器的技术手册中, 陀螺和加速度计的白噪声参数常用 ARW 和 VRW 来表示, 其数值等同于对应的连续时间白噪声的谱密度。ARW 和 VRW 用于表征陀螺和加速度计的噪声具有一定的便利性。例如, 一个 ARW 为 $0.1^{\circ}/\sqrt{h}$ 的陀螺, 在姿态积分解算 4 小时后, 其噪声导致的姿态角误差的标准差 $\delta\theta$ 为

$$\delta\theta = \sqrt{\mathbf{qt}} = \mathrm{ARW} \times \sqrt{\mathrm{T}} = 0.1^{\circ} / \sqrt{\mathrm{h}} \times \sqrt{4\mathrm{h}} = 0.2^{\circ}$$



图 4.6 随机噪声积分解算前后的关系(以陀螺为例)

白噪声可有连续时间白噪声和离散白噪声序列两种形式。离散白噪声序列用均方根(RMS)或方差和带宽(bandwidth, BW)两个参数描述,它们与连续时间白噪声过程的 PSD 可通过下式进行转换:

$$RMS^2 = PSD \times BW \tag{4.7}$$

随机噪声无法被标定补偿,但是通常可通过取平均来降低其幅值,抑制其干扰。当 然这是当被测量为常值时才适用,这种取平均相当于一种平均值低通滤波。对于离散白 噪声序列,对于 w_1 到 w_n 的样本取均值 a,则 a 的标准差 σ_a 与白噪声序列的标准差 σ_w 之间存在如下关系

$$\sigma_{\rm a}^2 = \frac{\sigma_{\rm w}^2}{\rm n} \tag{4.8}$$

同理,对于连续时间白噪声在时间段 T 内取平均,得到

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{w}(\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{t} = \frac{1}{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T})$$
(4.9)

$$E\left\{\bar{w}^{2}(T)\right\} = E\left\{\left[\frac{\beta(T)}{T}\right]^{2}\right\} = \frac{1}{T^{2}}E\left\{\beta^{2}(T)\right\} = \frac{1}{T^{2}}q \cdot T = \frac{q}{T}$$
(4.10)

可见,平均后的白噪声序列的方差强度与平均时长成反比。例如在 IMU 的标定或 静态初始对准中,一般都会对 IMU 的一段静态观测数据取平均,以降低随机噪声对标 定和对准结果的影响。

4.2.5 量化误差/量化噪声

量化是将传感器感知的物理世界的连续模拟信号转换为离散数字信号的过程。在这 一过程中,连续信号被划分为一系列有限的整数离散值,其中相邻整数之间的间隔(即 最低有效位,LSB)对应的物理量被称为量化因子或当量。当模拟信号的值位于两个量 化值所表示的整数之间时,数字系统会将该值四舍五入(或截断取整)至最近的量化值, 从而产生量化误差。在原始数据曲线中,这种误差表现为台阶状的截断,如图4.7所示。 量化误差是一切量化操作所固有的,只要进行数字量化编码采样,传感器输出的理想值 与实际量化值之间就会存在这种细微的差异。量化误差反映了传感器输出的数字量的 最小分辨率。



图 4.7 量化误差

如第3章3.4节所述,高精度 IMU 通常采用增量形式输出以最大限度地降低离散采 样对惯导解算结果的影响。以陀螺的角增量输出为例,假设在某一时刻,实际的角增量 为 $\Delta\theta_k$,陀螺的量化输出为 $\Delta\theta_r$ 。当以脉冲为单位进行计算时,由于角增量是以脉冲形 式输出的,积分足够一个当量的角增量后才输出一个脉冲,因此 $\Delta\theta_r$ 为整数,而量化误 差 $\delta\theta = \Delta\theta_r - \Delta\theta_k$ 则是在区间 (-1,0]内均匀分布的随机序列。当将脉冲转换为角度 单位后, $\delta\theta$ 为在 (-1/LSB,0]内均匀分布的随机序列。因此,这种角增量量化误差可 能导致的最大角度误差为 1/LSB (即姿态误差),而且在底层硬件层面形成角增量的过程中具有"多退少补"的机制,即本次采样未达到一个脉冲当量的余量会带到下一次采样,从而避免了持续累积的姿态漂移。

然而,需要注意的是,当把这种角增量输出转换为角速度进行观察时,需要将角增量除以采样时间间隔或乘以数据采样率,这会导致角速度的量化误差为1/LSB/Δt。这个误差幅度往往较大。例如,对于一个高精度 IMU,其角增量输出的脉冲当量为1角秒,数据率为200Hz,则其角增量量化误差造成的姿态角误差不会超过1角秒,这个量级通常可以忽略不计,而转化为角速率后的量化误差为:

1角秒/0.005s = 200角秒/s = 0.055 deg/s = 200 deg/h

这会导致绘制的角速度曲线出现显著的量化台阶,尤其是在静态时段表现更明显, 看起来可能相当"匪夷所思"!与高精度 IMU 的传感器误差水平(0.01-1.0°/h)相比, 这种量化误差似乎显得完全无法接受。然而,请大家深入理解这一现象的根本原因,并 认识到这种角增量的量化误差实际上并不会对最终的陀螺姿态解算产生显著影响(最 大误差仅为1角秒)。

类似的情况也出现在加速度计的速度增量输出中,而且可能表现得更为明显。总的 来说,惯性传感器的量化误差在单个量化当量内呈均匀分布,可以在惯性导航解算的积 分过程中被滤除,因此不具有累积效应,对惯性导航系统的精度影响可以忽略不计(这 也是合理的当量值的基本要求)。因此,在 IMU 器件的设计开发过程中,量化误差(即 脉冲当量的取值)是一个需要考虑的因素,应确保其影响足够小;但在惯导系统设计和 精度评估过程中,一般不必考虑量化误差的影响。

4.2.6 其他误差

除了上述常规的误差项,惯性传感器在使用过程中还存在一些深层次的误差源,包括陀螺的g敏感性(g-sensitivity)、加速度计的尺寸效应等。这些深层次的误差源通常 只在特定的应用场景下对惯性导航结果产生不可忽略的影响,需要在惯性导航系统的 设计、制造和使用过程中加以重视,通过硬件改进、软件补偿和环境控制等手段来减小 这些误差对导航精度的影响。这些内容超出了本书的范围,不做详细介绍。

此外,惯性传感器还可能受到工作环境的影响。例如,当 MEMS IMU 靠近高频振动源安装时,高频振动可能激发传感器内部结构的某些固有频率,发生谐振,导致测量数据出现额外误差甚至异常。针对这类误差,需要改善 IMU 的安装环境,使其远离振动源或者合理增加隔振设施。机械应力也会影响惯性传感器的性能,导致输出信号漂移或波动。例如,IMU 安装在电路板上时,如果电路板受到挤压或拉伸,产生的应力可能对 IMU 的导航性能产生影响。因此,在使用 MEMS IMU 时应特别注意这些因素。

4.2.7 IMU 测量误差模型

IMU 的测量模型可写成如下形式:

$$\mathbf{\hat{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{b}_{a} + \mathbf{S}_{a}\mathbf{f} + \mathbf{N}_{a}\mathbf{f} + \mathbf{w}_{a}$$
(4.11)

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib} = \boldsymbol{\omega}_{ib} + \mathbf{b}_{g} + \mathbf{S}_{g}\boldsymbol{\omega}_{ib} + \mathbf{N}_{g}\boldsymbol{\omega}_{ib} + \mathbf{w}_{g}$$
(4.12)

式中, 上标"~"表示加速度计或陀螺的测量值向量, f 和 ω_{ib} 分别为实际的比力向量 和角速度向量, \mathbf{b}_a 和 \mathbf{b}_g 分别为加速度计和陀螺的零偏向量, \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_g 分别为加速度计 和陀螺的随机噪声向量, \mathbf{S}_a 和 \mathbf{S}_g 分别为加速度计和陀螺的比例因子误差向量形成的对 角阵, \mathbf{N}_a 和 \mathbf{N}_g 分别为加速度计和陀螺的交轴耦合误差矩阵。因此, 三轴加速度计误 差模型写作

$$\delta \mathbf{f}^{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{f}}^{\mathbf{b}} - \mathbf{f}^{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_{\mathbf{a}} + (\mathbf{S}_{\mathbf{a}} + \mathbf{N}_{\mathbf{a}}) \, \mathbf{f}^{\mathbf{b}} + \mathbf{w}_{\mathbf{a}}$$
(4.13)

$$\begin{bmatrix} \delta f_{x} \\ \delta f_{y} \\ \delta f_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{a,x} \\ b_{a,y} \\ b_{a,z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta s_{a,x} & m_{a,xy} & m_{a,xz} \\ m_{a,yx} & \delta s_{a,y} & m_{a,yz} \\ m_{a,zx} & m_{a,zy} & \delta s_{a,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x} \\ f_{y} \\ f_{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{a,x} \\ w_{a,y} \\ w_{a,z} \end{bmatrix}$$
(4.14)

三轴陀螺的误差模型为

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b} - \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \mathbf{b}_{g} + (\mathbf{S}_{g} + \mathbf{N}_{g}) \,\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \mathbf{w}_{g}$$
(4.15)

$$\begin{bmatrix} \delta \omega_{\mathbf{x}} \\ \delta \omega_{\mathbf{y}} \\ \delta \omega_{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\mathbf{g},\mathbf{x}} \\ \mathbf{b}_{\mathbf{g},\mathbf{y}} \\ \mathbf{b}_{\mathbf{g},\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \mathbf{s}_{\mathbf{g},\mathbf{x}} & \mathbf{m}_{\mathbf{g},\mathbf{xy}} & \mathbf{m}_{\mathbf{g},\mathbf{xz}} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{g},\mathbf{yx}} & \delta \mathbf{s}_{\mathbf{g},\mathbf{y}} & \mathbf{m}_{\mathbf{g},\mathbf{yz}} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{g},\mathbf{zx}} & \mathbf{m}_{\mathbf{g},\mathbf{zy}} & \delta \mathbf{s}_{\mathbf{g},\mathbf{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\mathbf{x}} \\ \omega_{\mathbf{y}} \\ \omega_{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{g},\mathbf{x}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{g},\mathbf{y}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{g},\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$
(4.16)

在后面做组合导航算法设计时,一般将常值零偏建模为随机常数,将短时变化的零 偏部分统一建模为一阶高斯马尔可夫过程或随机游走,随机噪声建模为高斯白噪声,对 于比例因子和交轴耦合常建模为随机常数或一阶高斯马尔可夫过程。如果在组合导航 解算过程中,零偏、比例因子误差和交轴耦合误差都可以估计出来,那么可以将上述误 差参数估值(用上标^{*}表示)补偿至原始的比力和角速度观测值中,得到补偿后的原始 观测为

$$\hat{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{I}_3 + \hat{\mathbf{S}}_a + \hat{\mathbf{N}}_a\right)^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{b}}_a\right)$$
(4.17)

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\rm ib} = \left(\mathbf{I}_3 + \hat{\mathbf{S}}_{\rm g} + \hat{\mathbf{N}}_{\rm g}\right)^{-1} \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\rm ib} - \hat{\mathbf{b}}_{\rm g}\right)$$
(4.18)

式中, $\hat{\mathbf{f}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 为补偿后的比力和角速度观测向量。

需要注意的是,在上述模型中,没有列出惯性传感器的深层次误差,包括陀螺的 g 敏感性误差和比例因子的非对称性误差。上述模型是一个相对比较通用的惯性传感器 误差模型,而针对一些特殊场景的惯导和应用,可能需要根据实际情况增广深层次的传 感器误差。

4.3 惯性传感器误差的 Allan 方差分析

惯性传感器误差构成相对复杂,包含了高频随机噪声和中低频的零偏不稳定性等 多种不同频段和不同类型的随机误差,需要对其进行精细的细分建模和参数估计,以便 做最大限度的误差标定补偿并定量评估其残留部分对惯性导航精度的影响。Allan 方差 作为一种时频分析方法(本质上是频域方法),能够有效描述误差时间序列在不同时间 尺度上的波动特性,即不稳定性。特别是在中长期缓变随机波动的定量描述与分析中具 有很强的表现力,这类误差对惯导积分解算后的漂移误差影响最大,正是惯性器件误差 分析所关注的。对不同时间尺度上的 Allan 方差值构成的曲线进行特征分析,可以辨识 其中包含的随机误差模型的类型和相应的模型参数。这类似于用功率谱密度(PSD)来 描述信号在不同频率尺度上的功率分布,并用 PSD 曲线进行系统模型辨识和参数估计。

4.3.1 Allan 方差

在统计学领域描述随机变量的两个经典参数是均值和方差,前者反映误差的总体 偏移,后者则刻画了误差的波动程度。早期在定量表征原子钟的频率稳定度时采用的就 是经典方差方法。然而,美国学者 David W. Allan 在研究铯原子钟频标的频率稳定度 时发现,经典方差会随着测量时间的延长而趋于发散。为克服这一局限,Allan 提出了 一种新的评估方法,即后来广为人知的 Allan 方差,亦翻译为阿伦方程或艾伦方差。高 精度时钟与惯性器件都要做某种形式的积分来获得最终结果,为此都关注传感器的稳 定度参数,将 Allan 方差引入惯性器件的评估也就顺理成章了。在惯性仪器测试与数据 分析领域,惯性传感器的输出数据中通常包含多种随机误差。Allan 方差能够有效地识 别和量化这些原始数据中的不同随机误差成分,包括白噪声、闪烁噪声和随机游走等, 这些噪声类型与频率标准中的噪声特性相似。1995 年,电气与电子工程师协会(IEEE) 在其单轴激光陀螺的测试标准中引入了 Allan 方差分析方法。时至今日,Allan 方差已 经演变成一种独立且通用的时间序列分析工具,在众多领域中广泛应用。

4.3.1.1 Allan 方差的计算

假设待分析的时间序列包含的数据点总数为 N, 记为 y_i(i=1,2,3,…,N), 数据的采 样周期(采样的间隔)为 τ₀。以下是 Allan 方差的计算过程:

- (1) 分块:根据感兴趣的时间尺度,按长度为 τ = (n 1) τ₀, n < N/2 (τ 也称作时间簇、分块长度或窗口长度)的窗口,将整个序列划分为若干个互不重叠的数据块,每个块包含 n 个数据点,如图4.8所示。
- (2) **计算每个分块的均值**,记为 \bar{y}_k ,即

$$\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} \mathbf{y}_{i, k} = 1, 2, \cdots, \mathbf{N}_{c}$$
 (4.19)

(3) 对相邻块的均值求差,即

$$\Delta \bar{y}_{k} = \bar{y}_{k+1} - \bar{y}_{k}, \quad k = 1, 2, \cdots, N_{c} - 1$$
(4.20)



图 4.8 Allan 方差数据分块过程

(4) 统计相邻块均值之差的均方值,得到对应于分块长度 τ 的 Allan 方差,记
 为 σ²(τ),即

$$\sigma^{2}(\tau) = \frac{1}{2(N_{c}-1)} \sum_{k=1}^{N_{c}-1} (\Delta \bar{y}_{k})^{2}$$
(4.21)

- (5) 改变分块长度 τ, 重复步骤(1) ~ 步骤(4)的计算过程, 直至遍历完所有 预定的分块长度,得到对应于不同长度 τ 的一系列 Allan 方差值。
- (6) 绘制 Allan 方差曲线:将分块长度 τ 作为横坐标,与之对应的 Allan 方差的平方根 σ(τ) 作为纵坐标,绘制 Allan 方差曲线。通常,Allan 方差曲线习惯于在双对数坐标系下绘制,即以 log₁₀(τ)为横轴,以 log₁₀(σ(τ))为纵轴,以增强其表现力。例如,可以使用 MATLAB 中的 loglog 函数来实现这一绘图过程。
- (7) 分析 Allan 方差曲线:通过观察 Allan 方差曲线的形状特征,识别原始时间 序列中的不同误差类型,并提取其模型参数。

类似于传统方差的概念,从严格意义上讲, $\sigma^2(\tau)$ 被称为 Allan 方差,而其平方根 $\sigma(\tau)$ 应该称作 Allan 标准差。然而,在实际应用中,人们往往习惯性地将 $\sigma(\tau)$ 直接 称为 Allan 方差。今后,除非特别指明,当提到 Allan 方差时,若无特殊说明,亦指代 Allan 标准差。式 (4.21) 相比于 N_c – 1 个块平均差值的均方值多了系数 1/2,其目的是 与经典方差分析相兼容。

在步骤(4)中,分块长度的选择至关重要,它应能够覆盖足够的时间尺度,以便准确分析不同时间尺度和类型的误差,如白噪声、闪烁噪声和随机游走噪声。分块长度的确定可采用多种策略,其中一种最常见的方法是按2的幂次递增选取。首先,选取一个较小的分块长度作为起点,例如2倍采样周期。接着,选择一个较大的分块长度以分析时间序列中的长期趋势,这个长度同样设置为2的幂次。在最小和最大分块长度之间,按2的幂次递增,形成一系列分块长度。例如,若最小分块长度为2,最大为512,则一般设置为以下序列:2、4、8、16、32、64、128、256、512。

步骤(1)的分块过程中,通常将原始序列划分为不重叠的数据块。然而,在实际应用中,也允许数据块之间存在重叠,这样得到的结果被称为重叠 Allan 方差(overlapping Allan variance)。Allan 方差被提出以来,经历了多次推广和优化,衍生出了多种变体,包括改进型 Allan 方差、重叠 Allan 方差以及 total Allan variance 等,以适应不同的

误差分析和测量需求。在惯性传感器误差分析领域,通常采用经典 Allan 方差或重叠 Allan 方差就足以满足需求[28]。

4.3.1.2 Allan 方差的直观理解

前文提及,经典方差虽然能揭示序列的整体波动情况,但是无法细致描绘不同时间 尺度上的误差波动。相比之下,Allan 方差则对不同时间尺度的误差成分均有较强的表 现力,这是因为 Allan 方差计算过程中能够针对特定时间尺度上的误差波动进行精确的 提取。例如,当我们仅关注某一特定时间尺度上的误差波动时,比该时间尺度更细微的 短期变化(如短时间的快速跳动)以及更宏观的长期变化(如数倍于该时间尺度的长时 间缓慢漂移)便不再是关注点,我们期望这些无关波动能够在误差指标中被排除。Allan 方差正是通过以下方式实现这一目标的:首先,通过设定分块长度来体现关注的时间尺 度。接着,利用块平均的操作消除短于分块长度的快速变化成分(即细节波动)。然后, 通过相邻块之间求差去除长于两个时间块长度的缓慢变化成分(即宏观波动)。最后, 对得到的若干差值序列进行均方值的统计(这是处理随机样本数据的标准步骤),由此 得到的统计结果便反映了介于1倍到2倍分块长度之间这一特定时间尺度范围内的误 差波动情况。

因此, Allan 方差计算本质就是使信号通过一个带通滤波器, 再做某种时间的统计 平均。其中, 块平均的过程相当于让信号通过一个低通滤波器, 而相邻块之间的求差操 作则相当于一个高通滤波器。如果对误差序列在各个时间尺度上的成分都感兴趣, 则可 以通过改变分块长度, 从短到长进行"扫描", 从而获得一系列 Allan 方差值。接着, 可 以绘制一个"Allan 方差与分块长度"的关系曲线, 这样就能够全面地揭示被分析误差 序列的特性了。

4.3.1.3 Allan 方差的精度

实际应用中,Allan 方差总是基于有限长度样本数据计算得到的,因而与经典方差 估计一样,Allan 方差也可以看作一种估计或统计量。对于给定的时间序列,Allan 方 差计算时分块长度越小,可供分析的数据块数量便越多,计算得出的Allan 方差便越精 确。相反,若分块长度越大,独立的数据块数量则越少,Allan 方差估计值的误差也越 大。研究表明,分块长度 τ 所对应的 Allan 方差估计值 $\hat{\sigma}(\tau)$ 的不确定度,可以通过百 分比形式进行量化,其定义如下:

$$\delta(\tau) = \frac{\hat{\sigma}(\tau, \mathbf{m}) - \sigma(\tau)}{\sigma(\tau)}$$
(4.22)

式中, $\sigma(\tau)$ 表示对应时长为 τ 的 Allan 方差理论值(即无任何计算误差的理想情况), $\hat{\sigma}(\tau, m)$ 表示基于 m 个独立数据分块计算的 Allan 方差。当 m $\rightarrow \infty$ 时, $\hat{\sigma}(\tau, m)$ 将趋 近于 Allan 方差的理论值 $\sigma(\tau)$ 。上述 Allan 方差估计误差可以近似简化为以下形式:

$$\delta\left(\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{N}{n} - 1\right)}}\tag{4.23}$$

式中,在公式中,N表示待分析序列中的数据总数,n是长度为 τ 的窗口内包含的数据 点数。N与n的比值表示可以形成的独立数据分块的数量。

假设有一个包含 10000 个数据点的时间序列,如果窗口长度包含的样本点数为 2000,那么独立窗口的数量将只有 5 个 (即 $\frac{N}{n} = \frac{10000}{2000} = 5$),在这种情况下,Allan 方 差的估计误差可能达到 35%。相反,如果窗口长度包含的数据点数为 50,那么可以形成的独立窗口数量将增加到 200 个,此时 Allan 方差的计算误差则为 5%。

从这里可以看出, Allan 方差曲线 $\tau \sim \sigma(\tau)$ 的最右侧部分的不确定度较大, 导致 分析结果的可信度降低。为了保证 Allan 方差分析的可靠性, 通常建议重点关注曲线的 左侧区域(即较短 τ 值的部分), 并确保有足够长度的静态数据来获得统计上显著和可 靠的结果。

4.3.2 误差类型及其 Allan 方差模型

Allan 方差和功率谱密度是分析随机过程特性的两种重要方法,二者之间存在确定的转换关系。将功率谱密度转换为 Allan 方差的过程是直接且明确的。然而,从 Allan 方差反求功率谱密度的过程则不是唯一的,因为 Allan 方差在处理过程中丢失了一些频域信息。Allan 方差与信号的双边功率谱密度之间的转换关系为

$$\sigma^{2}(\tau) = 4 \int_{0}^{\infty} S_{\Omega}(f) \frac{\sin^{4}(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^{2}} df \qquad (4.24)$$

式中, S_{Ω} 为功率谱密度函数, f 为频率。

表4.1以陀螺分析为例,详细列出了陀螺原始数据中普遍存在的五种随机误差类型, 并给出了它们的 Allan 方差模型及其与功率谱密度函数之间的对应关系。当应用 Allan 方差来分析加速度计数据时,采用的分析方法大致相同,涉及的误差类型主要包括加速 度计的量化噪声、零偏不稳定性、加速度(或比力)随机游走以及比力测量中的速率斜 坡误差。

除了表中提到的五种主要误差类型之外,常见的误差还包括指数相关噪声(即马尔可夫噪声)和正弦误差等。感兴趣的读者可以通过查阅文献[29,30,27],来获取这些噪声源的详细资料。通过分析不同噪声源的 Allan 方差模型,可以观察到它们在 Allan 方差的双对数曲线中呈现出不同的图形特征。例如,对于陀螺的角度随机游走误差,如果对 Allan 方差模型的两边同时取对数并进行整理,可得:

$$\log_{10} \sigma \left(\tau \right) = \log_{10} \mathbf{N} - \frac{1}{2} \log_{10} \tau$$

-				
误差类型	功率谱 $S_{\Omega}(f)$	Allan 方差 $\sigma^2(au)$	参数及常用单位	备注
量化噪声	$\frac{\tau_0 Q^2}{\left(2\pi f\right)^2}$	$\frac{3Q^2}{\tau^2}$	量化噪声系数 Q, °	70 为量化采样周期
角度 随机游走	N^2	$\frac{\mathrm{N}^2}{\tau}$	角度随机游走系数 N, °/√h	N = $\sqrt{q} = \sqrt{T_s}\sigma_{wk}$ 其中 q 为角速率白噪声过程 的 PSD, σ_{wk} 为对应离散白 噪声序列的标准差, T _S 为 采样周期
零偏 不稳定性	$\frac{\mathrm{B}^2}{2\pi\mathrm{f}}$	$\approx \frac{4B^2}{9}$	零偏不稳定性系数 B, °/h	_
角速率 随机游走	$\frac{\mathrm{K}^2}{\left(2\pi\mathrm{f}\right)^2}$	$\frac{\mathrm{K}^2\tau}{3}$	角速率随机游走 系数 $\mathrm{K}, ^{\mathrm{o}}/\sqrt{\mathrm{h}^3}$	$K = \sqrt{q} = \sqrt{T_s} \sigma_{wk}$ 其中 q 为角加速度白噪声 过程的 PSD, σ_{wk} 为对应离 散白噪声序列的标准差, T_s 为采样周期
速率斜坡	_	$\frac{\mathrm{R}^2\tau^2}{2}$	角速率斜坡系数 R,°/h ²	速率斜坡属于确定性误差, 而不是随机误差

表 4.1 常见随机误差的功率谱与 Allan 方差模型

可以看出,角速度随机游走误差在 $\tau \sim \sigma(\tau)$ 的双对数图中表现为斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线。相应地,角速率随机游走则表现为斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线。实际系统输出的信号通常是由 多种不同的误差类型组合而成的,因此其 Allan 方差曲线往往不是单一斜率的直线,而 是由多种独立的图形叠加而成的。对于由多种噪声源叠加而成的信号,其理想的 Allan 方差双对数曲线可以看作是由多段具有不同斜率的直线或不同形状的曲线首尾相连而 成的,如图4.9所示。

通过分析 Allan 方差曲线不同区段的斜率和形状,可以识别原始数据中包含的随机 误差类型,并计算相应的模型参数。例如,如果在 Allan 方差曲线的左侧区段出现斜率 为 $-\frac{1}{2}$ 的直线,这表明原始数据中存在白噪声。对于白噪声的模型参数,可以通过以下 方法计算得到:在斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线上选取任意一点(通常建议选择靠近左侧的点,因 为此时 Allan 方差的计算误差较小),设该点的坐标为(τ_i, σ_i),则角速度随机游走系数 N 可以通过公式系数 N = $\sigma_i\sqrt{\tau_i}$ 计算得到。之后,将 N 的值转换为常用的单位。其他误 差模型的识别和参数计算也可以采用类似的方法,具体步骤可以参考文献[29, 30, 27]。



图 4.9 各类随机误差的 Allan 方差曲线[30]

值得指出的是,即使在 Allan 方差曲线中没有观察到斜率为 -¹/₂ 的直线,这也不意 味着原始数据中不存在白噪声成分。这可能是因为白噪声被量化噪声或其他高频噪声 所掩盖。因此,在分析 Allan 方差曲线时,需要综合考虑所有可能的噪声源,并注意曲 线的细节,以便准确识别和评估数据中的误差类型。

实践经验表明,即使系统包含了上述各类噪声,但在 Allan 方差曲线中也无法观察 到如图4.9所示的全部曲线形状,通常只能看到部分特征。而且对于某个具体惯性器件 的测试数据,其 Allan 方差曲线可能不会展现出图4.9中的典型形式和完整曲线特征,而 可能仅表现出其中的几段。这是因为某些类型的噪声可能不存在,或者虽然存在,但由 于幅度较小而被其他更强的噪声类型所掩盖。

例如,在某些光纤陀螺中,量化噪声的幅度较大,导致在 Allan 方差曲线的高频部 分,斜率为 –1 的直线可能会完全遮挡住代表陀螺白噪声(即角度随机游走,ARW)的 斜率为 –¹/₂ 的直线,使得在 Allan 方差曲线中无法观察到白噪声的特征。相反,对于某 些低精度的 MEMS 惯性导航系统,其陀螺的角速率白噪声幅度远大于量化噪声的幅度, 在这种情况下,很可能在 Allan 方差曲线中无法观察到代表量化噪声的斜率为 –1 的直 线段。

这些情况表明,在分析 Allan 方差曲线时,必须考虑到不同噪声源的可能性和它们 相对的强度,并考虑传感器类型、精度等级和测试条件等多种因素的影响。此外,在用 Allan 方差对惯性传感器做随机误差分析时,还应注意以下问题:

(1) 注重曲线观察,避免强行拟合:详细分析之前,务必先仔细观察 Allan 方差 曲线,并通过直观判断来识别曲线所展示的误差种类,一般只能观察到少数 几种随机误差。经验表明,利用最小二乘回归法强行拟合图4.9中的各种误差 是不必要且不合理的,这种做法过于理想化。对于那些在曲线中不易察觉的 随机误差,即便是勉强通过拟合得出,也可能会失真甚至误判。

- (2)考虑不同种类误差之间的相互影响: Allan 方差曲线是多种不同类型不同强度随机误差叠加的产物。实际的 Allan 曲线往往不会如理论模型那般理想和纯粹,其曲线形态和直线斜率可能与图4.9和表4.1中的理论值存在差异。例如,当白噪声受到轻微量化噪声的影响时, Allan 方差曲线在高频段的直线斜率并不会严格等于 -¹/₂, 而是在 [-1, -¹/₂] 区间中靠近 -¹/₂。因此,在数据分析时,不应过分追求这种理论上的纯粹性。
- (3) Allan 方差曲线无法反映随机常数误差:原因在于其计算过程中,数据块间的差分操作导致常值误差被消除。因此,利用 Allan 方差分析无法对陀螺仪和加速度计的固定零偏及零偏逐次上电重复性进行评估。同理,地球自转引起的恒定角速度分量也不会对陀螺静态数据的 Allan 方差分析造成影响,故在计算 Allan 方差之前,无需从陀螺数据中扣除地球自转角速度的影响。
- (4) 正确解读 Allan 方差指示的零偏不稳定性: Allan 方差所指示的零偏不稳定 性通常对应于 Allan 方差曲线的 "谷底"部分。在数值上,这一指标通常显著 小于国内业界普遍采用的国军标的 10 秒平滑指标,有时甚至存在数量级的 差异,详细对比见本章4.2.1.1小节。以 Sensonor 公司的 STIM300 为例,其技 术手册中标注的陀螺零偏不稳定性为 0.5°/h。部分初学者可能会因此误判其 为高精度战术级 IMU,并在初始对准中使用静态粗对准进行寻北。然而,该 数值其实代表的是陀螺 Allan 曲线的 "谷底"的数值,远小于我国国军标中 的零偏稳定性参数,并且没有反映零偏的逐次上电重复性误差。因此,虽然 STIM300 是一款性能相对优秀的 MEMS IMU,但是它还不能算作高精度战 术级 IMU,也没有静态自寻北的能力,因为其陀螺的逐次上电重复性误差可 能高达几十°/h。
- (5)关于随机误差模型参数的计算:Allan 方差的相关研究文献[29, 30]均提供了 具体的计算方法。以陀螺角度随机游走参数 N 的计算为例,文献通常指出, 在 Allan 方差曲线中,在横轴取值为 1 时,相应的纵轴数值代表游走系数 N。 需注意的是,这里的横轴数值 1 并非代表 1 秒或 1 小时,而是一个归一化的 单位。在实际应用中,建议在随机误差对应的 -¹/₂ 斜率直线段上任意选取一 个点,读取其横纵坐标,依据 Allan 方差模型计算出模型参数后转换为常用 单位。当然,通过单一点的坐标来计算模型参数可能会存在一定的误差,因 此,也可以对 Allan 方差曲线的这段进行直线拟合,再从拟合得到的直线模 型中准确提取模型参数。
- (6) Allan 方差分析结果的检核:用 Allan 方差分析惯性传感器误差后,需要对识别出的模型参数进行准确性验证。经验表明,Allan 方差分析得到的角度随机游走(ARW)和速度随机游走(VRW)参数与 IMU 制造商提供的标称指标基本一致,因此,这些参数可作为检验 Allan 方差分析结果准确性的依据。
- (7) 原始数据序列的时长要求: Allan 方差分析对原始数据序列的长度有严格要求, 需显著超过所关注的随机误差的相关时间尺度。在 Allan 方差曲线的右

侧,数据点的估计误差往往较大,因而在进行分析时,必须确保 Allan 方差的计算误差控制在一个合理的水平。依照推荐的经验标准,该计算误差应控制在 13% 以内[31, p.197]。

- (8) 原始数据采集环境的要求:惯导的原始数据必须在静止条件下采集。如果测试平台不稳定,会干扰 Allan 方差的分析结果,因为 Allan 方差无法区分实际的运动信号和随机误差。在通常情况下,惯性传感器的精度越高,对静止条件的要求也越严格。例如,不应在高楼层环境中进行静止数据采集,而应在地面上的隔振稳定平台上进行,因为高楼可能发生小幅度的摆动。在数据采集过程中,应保持测试温度相对恒定,以减少温度变化对测试结果的干扰。经验表明,低成本的 MEMS IMU 芯片的零偏可能存在一个明显的温升过程,因此建议使用温度平衡后的数据进行 Allan 方差分析。
- (9) 依据 IEEE 952-1997 标准对陀螺随机误差进行分析时(具体模型见表4.1),建 议使用角速率形式的陀螺原始观测值进行 Allan 方差计算。对于中高精度的 陀螺,其角增量观测数据可以通过除以采样时间间隔来转换为角速率观测值。
- (10) Allan 方差在分析表4.1中所列的 5 种主要随机误差方面非常方便。尽管许多 文献指出 Allan 方差同样适用于分析一阶高斯马尔可夫过程和周期信号,但 除非周期信号非常显著,否则相较于功率谱分析,Allan 方差方法在处理这 些信号时并不那么得心应手。

4.3.3 Allan 方差分析举例

图4.10所示是 ADIS16465-2 MEMS IMU (美国 ADI 公司) 三轴陀螺实测数据的 Allan 方差曲线,静态数据时长为 10 小时。



图 4.10 ADIS16465-2 陀螺实测 Allan 方差曲线图

根据图4.10可给出以下分析结果:

- (1) 图中三轴陀螺的 Allan 方差曲线均只有较为明显的三段: 0.005~7s 之间为斜率为 -¹/₂ 的直线, 50 以上为斜率为 ¹/₂ 的直线, 中间有一小段斜率为 0 的 "谷底"。
- (2) 图中可以看出该 IMU 的三轴陀螺精度水平并非一样,其中 y 轴陀螺的噪声 更小一些(斜率为 -¹/₂ 的直线段)。一般来说陀螺精度越高,则 Allan 方差曲 线越靠近横轴。
- (3) 从图中 x 轴陀螺的 Allan 方差曲线中读取一个点的坐标,为(0.06 s, 26.8096 °/h),
 具体可以算出陀螺的随机游走系数 N 为

$$N = \sigma \sqrt{\tau} = 26.8096 \,(^{\circ}/h) \times \sqrt{0.06s}$$
$$= 26.8096 \,(^{\circ}/h) \times \sqrt{\frac{0.06}{3600}h}$$
$$= 0.11 \,^{\circ}/\sqrt{h}$$

与该 IMU 技术手册标称的 $0.15^{\circ}/\sqrt{h}$ 比较接近, Allan 方差 "谷底"为 $2^{\circ}/h$, 与手册标称的 $2.5^{\circ}/h$ 比较接近, 见本章4.4.1小节。

4.4 惯性传感器标称参数的解读

惯性传感器参数的命名缺乏统一性,这一现象是历史原因造成的,其源头可追溯至 冷战时期东西方国家在惯性技术领域的竞争与隔阂。在那个时代,东西方阵营在惯性技 术方面各自独立发展,形成了各自的技术传统和标准体系。这种技术分野直接造成了惯 性传感器参数命名的多样化。例如,同一种参数,在此处可能被称作"灵敏度",而在 别处则可能被称为"感应系数"。尽管 IEEE 曾试图通过制定标准来统一惯导术语[32], 但这些标准并未得到广泛的应用和执行。

进一步地,随着 MEMS 技术的兴起,惯性传感器行业经历了深刻的变革。许多生 产 MEMS 芯片和模块的企业,其背景多为集成电路芯片制造商,因此,他们在描述惯 性器件的精度指标时,往往采用了集成电路领域的术语(尤其是模拟集成电路),而非 惯导行业的专业术语。不仅如此,随着市场竞争的加剧,各厂家为了凸显自家产品的特 点,有时会故意使用独特的参数名称,以吸引客户关注。这种商业宣传策略无意中加剧 了参数命名的混乱程度。

对于用户而言,面对这些名称各异的惯性传感器参数,往往感到困惑,难以进行有效的比较和选择。因此,正确理解和解读惯性传感器手册中的标称参数,需要紧密结合手册中的上下文信息,必要时还需联系厂家咨询。本节以美国模拟器件公司(Analog Devices Inc.,ADI)的代表性 MEMS IMU 模块 ADIS16465 为例,进行传感器手册中的参数解读,以致敬这家 MEMS 惯性器件生产先驱。

4.4.1 正确理解厂家标称的陀螺零偏

陀螺零偏是惯性导航系统中的关键性能指标。如本章4.2.1小节所述, 陀螺零偏可进 一步划分为多种类型。当制造商仅向用户提供单一零偏指标时,该指标应当代表所有零 偏误差的综合结果,或是所有零偏指标中的最大值。然而,精明的制造商往往倾向于引 用 Allan 方差零偏(这一点在 MEMS 厂商中尤为常见),因为该数值通常较小,听起来 更具吸引力。部分不负责任的厂商甚至未明确指出所提供的是基于 Allan 方差的零偏数 据,这就可能会对用户造成误导。因此,用户在审视这些指标时需保持审慎,并深入理 解各项指标及其测定方法,特别是针对 MEMS 器件。

在评估 MEMS 器件时,笔者通常会特别关注其零偏的温度敏感系数,因为温度漂移是 MEMS 器件内在固有的关键误差源。若器件对温度变化不敏感,其他性能指标通常也较为稳定。此外,我们还应审视零偏的逐次上电重复性和零偏不稳定性(按照国军标)。然而,MEMS 器件的技术手册往往不提供这两个指标,而是仅提供 Allan 方差 零偏不稳定性。此时可以采取一种粗略的经验估算,将 Allan 方差零偏不稳定性放大 5~10 倍,以此作为国军标零偏不稳定性的估算值。

此外,在阅读惯性传感器指标参数时,还存在一个很明显但常被忽略的陷阱,即误 差数值的具体含义(即哪种统计值),惯性传感器的很多精度指标都是多次独立测试后 的统计结果,不同统计指标的大小会有很大差异。例如标识的某种零偏可能是多次独立 测试随机误差的峰峰值(P-P)、最大值(MAX)、均方根值(RMS)或 1σ 值。假设某 一随机误差遵循零均值正态分布,则有以下这些指标:

峰峰值 (P-P) = $2 \times$ 最大值 (MAX) = $6 \times$ 均方根(RMS, 1σ)

因此,采用不同的统计量来表示误差指标时,其数值可能会有显著差异。事实上, 多数制造商倾向于使用 1σ 值,因为其数值相对较小。鉴于此,在分析和选择惯性器件 时,必须确保用具有相同统计意义的零偏指标进行对比,从而避免被精明的厂商误导。

最后,值得强调的一点是,我们不应仅因低成本 MEMS 器件(尤其是 MEMS IMU 芯片)较大的常值零偏和全温度范围内的零偏误差就轻率地否定或拒绝它们。毕竟, MEMS 惯性导航系统通常不会长时间独立运作,而是与 GNSS 接收机或其它绝对定位 手段结合构成组合导航系统。在这样的系统中,常值零偏、逐次上电重复性以及缓慢的 零偏变化(包括温度漂移)一般都能通过组合导航算法(例如扩展 Kalman 滤波)有效 地进行在线估计和补偿。在这种情况下,真正需要关注的是零偏不稳定性的中短期变化 成分(例如,10 秒至 100 秒时间尺度上的波动)。而在这方面,MEMS 器件与传统的惯 性器件的差距并不显著,千万不要因此而错失一款物美价廉的优秀器件。

4.4.2 典型 MEMS IMU 模块产品的标称参数

美国 ADI 公司的 ADIS1646X 系列是经典的 MEMS IMU 模块产品,下面以其中 的 ADIS16465 为例来分析其陀螺和加速度计参数。

4.4.2.1 ADIS16465 的陀螺参数

Dynamic Range,动态范围,也即量程,是指陀螺能够测量的最大和最小值的范围。该 IMU 系列(即 ADIS16465-X)包含3个子型号,其陀螺仪量程有所差异,以满足不同的应用需求,如图4.11所示。选择大量程的子型号时,其绝对误差也会相应增大,这是因为一个传感器的相对测量能力通常是固定的。因此,在传感器选型过程中,应当根据实际应用需求选择适当的量程。量程过小可能无法满足使用范围,而量程过大则会在绝对误差上吃亏。为简化描述,下面仅针对 ADIS16465-1 这一子型号的指标参数进行详细解读,其量程为±125deg/s。

Parameter	Test Conditions/Comments	Min	Тур Мах	Unit
GYROSCOPES				
Dynamic Range	ADIS16465-1	±125		°/sec
	ADIS16465-2	±500		°/sec
	ADIS16465-3	±2000		°/sec
Sensitivity	ADIS16465-1, 16-bit		160	LSB/°/sec
	ADIS16465-2, 16-bit		40	LSB/°/sec
	ADIS16465-3, 16-bit		10	LSB/°/sec
	ADIS16465-1, 32-bit		10,485,760	LSB/°/sec
	ADIS16465-2, 32-bit		2,621,440	LSB/°/sec
	ADIS16465-3, 32-bit		655,360	LSB/°/sec
Repeatability ¹	−40°C ≤ T _C ≤ +85°C, 1 σ		±0.3	%
Error over Temperature	−40°C ≤ T _C ≤ +85°C, 1 σ		±0.3	%
Misalignment Error	Axis to axis, 1 σ		±0.05	Degrees
Nonlinearity ²	ADIS16465-1, full scale (FS) = 125°/sec		0.2	% FS
	ADIS16465-2, FS = 500°/sec		0.2	% FS
	ADIS16465-3, FS = 2000°/sec		0.25	% FS
Bias				
Repeatability ¹	−40°C ≤ T _C ≤ +85°C, 1 σ		0.4	°/sec
In-Run Bias Stability	ADIS16465-1, 1 σ		2	°/hr
	ADIS16465-2, 1 σ		2.5	°/hr
	ADIS16465-3, 1 σ		6	°/hr
Angular Random Walk	ADIS16465-1, 1 σ		0.15	°/√hr
	ADIS16465-2, 1 σ		0.15	°/√hr
	ADIS16465-3, 1 σ		0.26	°/√hr
Error over Temperature	$-40^{\circ}C \le T_{c} \le +85^{\circ}C$, 1 σ		±0.2	°/sec
Linear Acceleration Effect	Any direction, 1 σ		0.009	°/sec/g
Vibration Rectification Effect	Random vibration, 2 g rms, bandwidth = 50 Hz to 2 kHz		0.0005	°/sec/g ²
Output Noise	ADIS16465-1, 1 σ, no filtering, x-axis		0.05	°/sec rms
	ADIS16465-1, 1 σ , no filtering, y-axis and z-axis		0.07	°/sec rms
	ADIS16465-2, 1 σ, no filtering, x-axis		0.05	°/sec rms
	ADIS16465-2, 1 σ , no filtering, y-axis and z-axis		0.08	°/sec rms
	ADIS16465-3, 1 σ, no filtering, x-axis		0.11	°/sec rms
	ADIS16465-3, 1 σ , no filtering, y-axis and z-axis		0.16	°/sec rms
Rate Noise Density	ADIS16465-1, 10 Hz to 40 Hz, x-axis		0.002	°/sec/√Hz rms
	ADIS16465-1, 10 Hz to 40 Hz, y-axis and z-axis		0.003	°/sec/√Hz rms
	ADIS16465-2, 10 Hz to 40 Hz, x-axis		0.002	°/sec/√Hz rms
	ADIS16465-2, 10 Hz to 40 Hz, y-axis and z-axis		0.003	°/sec/√Hz rms
	ADIS16465-3, 10 Hz to 40 Hz, x-axis		0.004	°/sec/√Hz rms
	ADIS16465-3, 10 Hz to 40 Hz, y-axis and z-axis		0.0065	°/sec/√Hz rms
3 dB Bandwidth			550	Hz
Sensor Resonant Frequency			66	kHz

图 4.11 ADI 公司 ADIS1646X 陀螺性能参数表格截图

Sensitivity,即灵敏度,此处应理解为陀螺的比例因子或标度因子的设计值(即 名义值或额定值),这与传统光学陀螺中的脉冲当量的倒数的概念相似。灵敏度向用户 指示了如何将陀螺的数字输出量转换为角速度。其单位表示为 LSB/°/s,更严谨的写 法应该是 LSB/(°/s),其中 LSB 代表传感器输出数字量的最低有效位。需要注意的是, MEMS IMU 的输出通常为角速度和比力的形式,而不像传统高精度 IMU 那样输出角 增量和速度增量。不同量程的子型号具有不同的比例因子,从图4.11中还能看出该模块 还有低分辨率(16-bit)和高分辨率(32-bit)两种输出模式。考虑到惯导对 IMU 的精 度要求,应优先选择高分辨率模式。

Repeatability (sensitivity 的细化指标之一),翻译为重复性。初看似乎是陀螺 比例因子的逐次上电重复性,但根据表格后面的注释 1 (未在图4.11中显示),它实际上 是指在 500 小时的高温测试中观察到的长期变化。尽管笔者对这种测量重复性的方法 有些疑惑,但这种严格的测试确实能够反映出该参数的长期稳定性和重复性。具体数值 为 0.3% (千分之三),并且是基于 1σ 的标准。这个数值并不算小,意味着在实际使用 过程中,可能会观察到高达 0.6% (2σ) 甚至 0.9% (3σ) 的比例因子误差。

Error over Temperature (sensitivity 的细化指标之一),指比例因子的全温误 差,即指比例因子在额定工作温度范围内相较于室温 (25°C)条件下的比例因子的相对 变化。该指标的具体数值为 0.3% (1σ),与重复性 (repeatability)的数值相当,表明该 传感器在生产环节做了内部温度标定和补偿。

Misalignment Error,可以有多种翻译和含义,但在第二列中测试条件/备注(test condition/comments)中提到,此处特指轴与轴(axis to axis)之间的误差。因此,该参数应理解为陀螺仪三轴之间的非正交性误差(请注意,此处不是指陀螺敏感轴与 IMU 外壳轴线之间的角度偏差,那种偏差会更大一些)。该指标的具体数值为 0.05° (1σ),该误差相对较小,换算成弧度大约为 0.0009 (千分之一弧度),相较于 0.3% 的比例因子误差,几乎可以忽略不计。

Nonlinearity,非线性,此处具体指满量程直线拟合后的残差(见原始手册的表格 注释 2)。0.2%(千分之二)的精度在 MEMS IMU 中算是中规中矩。

Bias Repeatability, 陀螺零偏重复性,是惯性导航和组合导航极为关注的重要器件指标。与之前讨论的比例因子重复性定义相似,此处所指的并非陀螺零偏的逐次上电重复性误差,而是在 500 小时高温测试中观察到的长期变化。该指标的具体数值为 0.4°/s,换算为常用单位则为 1440°/h,这一数值不容小觑,反映出该 IMU 模块的陀螺 零偏在长期稳定性和重复性方面表现较差。相较于价格仅十几美元的车规级 MEMS 芯片,该指标并未展现出明显的优势。幸运的是,用于 GNSS/INS 组合导航时,这种缓 慢变化的或单次使用中保持不变的零偏误差成分可以通过组合导航算法进行在线估计和补偿,因而对系统性能的影响相对有限。

In-Run Bias Stability,即单次上电零偏稳定性,具体数值为 2°/h,比前面的 Bias Repeatability 小了两到三个数量级。回顾本章4.2.1小节的提示,我们不禁好奇,如 此出色的指标究竟是指国军标中的零偏不稳定性,还是 Allan 方差曲线的"谷底"值? 图4.11的参数列表中并未给出详细的定义和注释,但好在厂家在产品技术手册中附上了 Allan 方差曲线,通过这一曲线,可以确认 Allan 方差的"谷底"正是这一数值,从而 判定该参数代表的是 Allan 方差所指示的零偏不稳定性。这一例子也再次提醒我们,惯 性传感器参数的含义必须结合技术手册上下文才能准确解读。

Angular Random Walk (ARW),角度随机游走,即陀螺角速率输出的白噪声 谱密度。具体数值为 $0.15^{\circ}/\sqrt{h}=0.0025^{\circ}/s/\sqrt{Hz}$,这一数值非常小,几乎达到了典型战 术级陀螺的水平。

Bias Error over Temperature, 陀螺的全温零偏误差,指陀螺零偏在其额定工作温度范围内相对于室温零偏值的变化量。具体数值为 0.2°/s,换算为常用单位则为 720°/h,这一数值表明该型陀螺的零偏对温度较为敏感。

Bias Linear Acceleration Effect, 陀螺零偏的加速度敏感性,这是陀螺性能中的一个深层次误差因素。具体数值为 0.009°/s/g,换算成常用单位则为 32.4°/h/g。这意味着当 IMU 所感受到的加速度每变化 1 倍重力时,其零偏的变化将达到 32.4°/h。这一误差幅度已经足够显著,在实际应用中不容忽视。

Vibration Rectification Effect,即振动整流效应,是衡量陀螺输出对振动环境 敏感度的一项指标,本质上是陀螺在振动环境下产生的非线性误差。具体是指陀螺在遭 受振动影响时,由于内部结构不对称所引起的输出信号的系统性偏差。对于那些存在剧 烈振动的应用场景,该效应不容忽视,如无人机、工程车辆等。

Output Noise, 陀螺输出噪声。在参数列表中特别注明了这一指标代表的是离散 白噪声的均方根 (RMS), 而非连续白噪声过程的功率谱密度 (PSD)。由此可以看出, 该指标与之前提到的角度随机游走 (ARW)存在一定的重叠, 两者之间是可以相互转 换的。考虑到这款 IMU 的带宽 (bandwidth) 为 550Hz, 因此可以根据相应公式进行换 算:

$$RMS = ARW \times \sqrt{BW}$$
$$= 0.15^{\circ} / \sqrt{h} \times \sqrt{550 Hz}$$
$$= 0.0025^{\circ} / s / \sqrt{Hz} \times \sqrt{550 Hz}$$
$$= 0.059^{\circ} / s$$

与列表中给出的 RMS 数值 0.05°/s 一致。因此,这个噪声指标在一定程度上显得有些 冗余。

Rate Noise Density,速率噪声密度。这个指标与前面的 ARW 简直就是完全 重复了,前文给出的 ARW 值为 $0.15^{\circ}/\sqrt{h}$,换算后为 $0.0025^{\circ}/s/\sqrt{Hz}$,与此处提供的 $0.002^{\circ}/s/\sqrt{Hz}$ 数值非常接近。不知厂家为何要两次列出同一指标,或许这个指标是专 门针对 10Hz 至 40Hz 这一关键频段,单独给出其噪声谱密度,以突出该频段内的噪声 性能。注意,该 IMU 的陀螺噪声,y 轴和 z 轴要比 x 轴略大,因此在应用中可以考虑 尽量将 x 轴配置在最重要的方向上。

3dB Bandwidth, 陀螺的带宽。具体数值为 550Hz,这样的带宽对于大多数应用 场景来说都是足够的。另外,注意到在手册中提及传感器噪声的 RMS 值时,同时提供 了相应的带宽信息,这种做法是严谨的。因为如果没有带宽的上下文,单独提及噪声的 RMS 值是没有意义的。

Sensor Resonant Frequency,即传感器的谐振频率。鉴于 MEMS 陀螺大多基于

振动陀螺的原理设计制造,该参数特指陀螺内部微机械结构的谐振频率。较高的谐振频 率更为理想,因为这样内部感知结构就不那么容易受到环境中的高频振动(如汽笛、蜂 鸣器等)或尖锐冲击的干扰。这里的 66kHz 算是非常高的了。

4.4.2.2 ADIS16465 的加速度计参数

加速度计与陀螺仪在参数命名上大多相似。因此,接下来将不再逐一阐释各项参数 的具体定义,而是直接针对各参数的精度进行简要解读和评价,见图4.12。

				-
ACCELEROMETERS ³	Each axis			
Dynamic Range		±8		g
Sensitivity	32-bit data format		262,144,000	LSB/g
Repeatability ¹	$-40^{\circ}C \le T_C \le +85^{\circ}C$, 1 σ		±0.2	%
Error over Temperature	$-40^{\circ}C \le T_C \le +85^{\circ}C$, 1 σ		±0.1	%
Misalignment Error	Axis to axis		±0.05	Degrees
Nonlinearity	Best fit straight line, $\pm 2 g$		0.25	% FS
	Best fit straight line, $\pm 8 g$, x-axis		0.5	% FS
	Best fit straight line, $\pm 8 g$, y-axis and z-axis		1.5	% FS
				-
Parameter	Test Conditions/Comments	Min	Тур Мах	Unit
Bias				
Repeatability ¹	-40°C ≤ T _c ≤ +85°C, 1 σ		1.4	mg
In-Run Bias Stabi l ity	1σ	3.6		μ <i>g</i>
Velocity Random Walk	1σ	0.012		m/sec/√hr
Error over Temperature	–40°C ≤ T _C ≤ +85°C, 1 σ	±1		m <i>g</i>
Output Noise	No filtering	0.6		mg rms
Noise Density	Bandwidth = 10 Hz to 40 Hz (no filtering)	23		µg/√Hz rms
3 dB Bandwidth			600	Hz
Sensor Resonant Frequency	Y-axis and z-axis		2.4	kHz
	X-axis		2.2	kHz

图 4.12 ADI 公司 ADIS1646X 加速度计性能参数截图

Dynamic Range,即动态范围,亦称作量程。该加速度计的动态范围限定在±8g, 其满量程输出达到 16g。对于需要更宽量程的应用场景,可以考虑选用 ADIS16467,其 量程拓宽至 40g,具体规格参数,请参阅 ADIS16467 的产品手册。

Sensitivity,灵敏度。与陀螺类似,该指标是指加速度计标度因子的名义值。这里给出的是高分辨率模式下(32-bit)的数值。

Repeatability,即标度因子重复性。具体数值为 0.2% (千分之二),精度尚可。

Error over Temperature,标度因子的全温误差,指温度变化对传感器标度因子的影响。具体数值为 0.1% (千分之一),这一数值相对较小(相比于标度因子重复性),表明其在不同温度条件下具有较高的测量精度和稳定性。

Misalignment Error,指加速度计三轴之间的非正交性。具体数值为 0.05°, 也即 0.001rad,相比于标度因子重复性不算很大。

Nonlinearity,即加速度计比例因子的非线性误差,反映了传感器输出与实际输入 之间非线性关系的程度。在 2g 的测量范围内,该加速度计的非线性误差为 0.25%,这 一水平可以认为是 MEMS 行业内的中等水平。然而,当测量范围扩展至全程 8g 时,其 非线性误差表现较差,这可能会影响测量的准确性。值得注意的是,y 轴和 z 轴的非线 性度显著高于 x 轴, 这意味着在实际应用中, 应优先考虑将 x 轴配置在最为关键或量 程最大的测量方向。

Bias Repeatability,即加速度计零偏重复性,具体数值为 1.4mg,相当出色,属于典型的战术级水平。

In-Run Bias Stability,加速度计单次上电零偏稳定性,与之前陀螺的 In-Run bias stability 一样,也是对应 Allan 方差曲线的谷底,属于比较取巧的零偏指标,不过 $3.6\mu g$ ($1\mu g = 1.0 \times 10^{-6} g$) 也是够小的了。

Velocity Random Walk,速度随机游走(VRW),也就是加速度计输出比力的 白噪声,具体数值为 0.012m/s/√h,噪声水平非常小。

$$0.012 \text{m/s}/\sqrt{\text{h}} = 0.0002 \text{m/s}/\sqrt{\text{s}}$$
$$= 0.0002 \text{m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$$
$$= 20 \mu \text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Bias Error over Temperature,加速度计的全温零偏误差,只有 $1mg(1\sigma)$,算 是非常稳定,完全够战术级水平了。

Output Noise 和 Noise Density:与陀螺类似,这两个噪声指标都与前面的 VRW 冗余了。

3dB Bandwidth 和 Sensor Resonant Frequency:与前面陀螺的类似,这里不再解释。600Hz 的带宽对一般应用是足够的;不过 2.2kHz 的谐振频率有点偏低。

总体而言, ADIS1646X 的加速度计作为 MEMS 器件, 其性能指标非常出色, 基本 上达到了战术级水平。

以上便是这款 MEMS IMU 中精度相关参数的全部解读。需要指出的是,手册中并 未列出零偏和比例因子的常值误差。笔者推测,这可能是由于在生产过程中,该 IMU 模块已经进行了粗略的自动标定,扣除了绝大部分常值误差(例如°/s 量级的常值陀螺 零偏)。一些精度更低的 MEMS IMU 芯片(如手机芯片)同样未提供常值误差数据,这 通常是因为这些误差值过大,列出可能会吓到用户。

总体而言,这款 MEMS IMU 模块勉强可算作准战术级水平的器件。尽管其陀螺的 零偏重复性和温度稳定性与准战术级标准尚有不小的差距,动态指标(如比例因子、交 轴耦合、非线性)也表现平平,但加速度计的性能却十分出众。在应用于 GNSS/INS 组 合导航系统时,若载体的动态性能要求不高(如普通车载或船载应用),其表现应该能 接近战术级惯性导航系统的水平(注意这里并非指该 IMU 具备静态寻北能力)。

这款 MEMS IMU 模块的参数标注方式具有一定的典型性,读者今后在查阅其他 MEMS 惯性器件产品的技术规格时,可作为参考。关键在于,需要结合技术手册中的 上下文的所有相关信息并充分利用惯性器件误差的相关知识来判断出每项指标的确切 含义。若在理解上仍有不确定性,那么最佳的做法是联系制造商或代理商以获取专业的 技术支持。

4.5 IMU 误差标定

惯性导航解算是一个时间积分过程,即便是微小的惯性传感器误差,也可能导致有 界或无界的导航结果误差[7]。提升惯性导航的精度主要有两个途径[27]:一个是优化仪 表的设计与加工工艺,或研发新型的更高精度惯性传感器;另一个是对惯性传感器及惯 导系统进行测试和标定,通过误差补偿技术来提高仪表和系统的导航精度。通过测试和 标定技术构建系统误差模型和估计相关误差系数,并通过误差补偿措施进一步提升其 使用精度,无需改动传感器硬件,具有重要的实用价值,已成为研制和生产惯性器件及 系统过程中不可或缺的一环。

惯性传感器的测试与标定关系密切,但还是有明显的区别。打个不太恰当的比喻, 测试犹如一场严格的考试,旨在全面检验学生的知识水平;而标定则更像是一场考前答 疑,针对性地解答学生的疑问,以提高其考试成绩。在测试过程中,需要对惯性传感器 的精度(包括各种误差参数)、环境适应性、使用寿命等多种指标进行全面考察,例如, 必须涵盖系统性误差和随机误差等各项误差参数。而标定的重点则在于对系统性常值 误差进行精确估计和有效补偿。

通过测试标定和误差补偿,原本看似不合格的惯性传感器可能重新具备使用价值, 满足相应的应用要求。例如陀螺厂家生产了一批导航级陀螺,并不是每只陀螺一生产出 来其零偏都满足指标要求,其常值零偏部分可能远大于 0.01°/h。但是只要其参数稳定, 随环境因素变化很小,那么把常值零偏标定和补偿之后就可能是一只合格的导航级陀 螺。因此,对于惯性传感器来说,其核心的要求就是指标参数要稳定,稳定的传感器就 是好传感器,至于常值误差只要仔细地标定补偿即可。因此,惯性传感器的设计指导思 想不应片面地追求降低其绝对误差,而应重点保证其参数的稳定性和重复性。对于传统 的中高精度 IMU,一般需要使用专业的测试和标定设备进行逐个或批次抽样标定。然 而,对于基于芯片工艺生产出来的 MEMS 惯导,由于是大批量生产,根本没有条件使 用昂贵的高精度转台进行逐个或逐批次标定,只能是想办法利用生产环节中的某一些 机会,做一些简单而高效的标定和补偿机制,其标定效果肯定无法跟专业设备相比。

原则上,所有系统性误差都可以被标定和补偿。例如,针对那些能够在较长时间内 保持稳定的误差项,可以通过部件级和系统级的精确标定来予以补偿,从而显著提高导 航系统的精度。然而,在标定过程中,通常考虑主要误差项。尽管次要误差项同样可通 过标定补偿措施予以修正,但其重要性相对较低。只有在主要误差项得到有效处理后, 才有必要对次要误差项进行标定。对于一些随机误差,则可考虑在导航算法中进行实时 的估计与补偿。例如,陀螺零偏的逐次上电重复性,在实验室和生产环节进行标定并无 实质性意义。这是因为现场上电情况与实验室条件存在差异,其数值每次上电都会发生 变化。但在实际应用中,上电后的零偏逐次上电重复性成分保持不变,因此可以通过在 线估计方法进行精确的补偿。又如,那些变化较为缓慢的零偏不稳定性,在上电后随时 间缓慢变化,导航算法便拥有了充足的时间和机会对其进行在线估计,待估计收敛后在 一定时间内使用该结果。同时,导航算法会持续更新以跟随这种零偏缓慢变化。关于在 线标定与估计的具体应用,将在第8章8.3节讨论。
4.5.1 标定设备

标定是通过比较传感器输出和已知输入参考值(即真值)来确定一组校正系数的过程,该系数用于补偿传感器的输出,消除其确定性误差的主要部分,使其与参考信息相吻合。因此,标定需要传感器输入值的参考信息,也即惯性传感器的参考输入。理想的参考信息应当精准且容易获取。对于加速度计而言,地球重力场提供了一个无处不在、稳定可靠和足够强的加速度参考,因此,重力加速度是标定加速度计最常用参考信息。对于陀螺而言,虽然地球自转角速度是一个客观存在且相对精确的参考信息,但其数值小、信号弱,通常不足以覆盖陀螺的量程(例如,几个弧度每秒至几百度每秒)。因此,实际标定陀螺时,需要利用专门制造的转台设备(如图4.13所示)来提供精确和足够覆盖陀螺量程的角速度参考(或精确的快速转动角度),转台提供的旋转角速度或角度可以根据需要调整大小,以适应不同陀螺的标定需求。



图 4.13 高精度三轴转台

针对陀螺的标定,转台可提供两种不同类型的参考:一种是角速率参考,即速率转 台;另一种是转动角度参考,即位置转台。这两种转台在实际工程应用中各有特点。对 于速率转台,若要求参考角速度与高精度陀螺仪的测量精度相匹配,技术实现难度较 大,且成本极高。相比而言,位置转台是一个更具性价比的选择。位置转台主要提供精 确的相对转角,得益于高精度的角度传感器和精确的角度控制技术,与高精度角速度及 其控制相比,精确角度的转动和控制相对容易实现,且成本较低。具体而言,角位置转 台可以转动一个精确的预设角度,然后通过高精度的角度传感器(如光电编码器)来测 量实际转动的角度,然后将该角度"真值"与陀螺积分解算出来的角度变化做比对,实 现陀螺误差参数的标定。这种方法允许转台的标定动作更加专注于角度这种静态参数 的精确测量和控制,而不是角速度这种动态参数的精确控制。通过这种方式,可以有效 地对陀螺仪进行标定,同时显著降低了设备成本。

无论是位置转台还是速率转台,其购置及维护成本均相对较高。在惯性仪器的测试

与标定领域,所需的设备不仅是转台,还包括诸如水平仪、稳定平板、六面体夹具、分度头、精密离心机、线振动台以及温度控制箱等。有关这些设备的详细信息,可参阅文献[27]。在选择标定设备时,应当基于待标定设备的精度级别、特定性能以及标定的精度需求,精心挑选合适的标定工具。

4.5.2 加速度计的六位置法静态标定原理

加速度计的静态六位置标定法简便、可靠,是常用的实验室标定方法,可以标定出 加速度计的零偏、比例因子和交轴耦合。标定要求加速度计的3个轴线分别朝上和朝下 静置一段时间,记录加速度计的原始数据。

4.5.2.1 两位置法静态标定

加速度计敏感轴正方向分别朝上和朝下,如图4.14所示,静止测量并记录其读数。 考虑常值零偏和比例因子误差,根据加速度计测量方程,易得加速度计的测量模型:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\rm up} = \mathbf{b} + (1 + \delta \mathbf{s})\mathbf{g} \tag{4.25}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{down} = \mathbf{b} - (1 + \delta \mathbf{s})\mathbf{g}$$
(4.26)

式中², \tilde{f}_{up} 和 \tilde{f}_{down} 分别表示加速度计敏感轴朝上和朝下时的实际输出, b 为加速度计常值零偏, δs 为加速度计常值比例因子误差。需要注意的是,上式中没有考虑加速度计的随机噪声项。这是因为在实际标定过程中,通常会对加速度计在静止状态下的测量值进行一段时间的连续记录,并取其平均值作为最终读数,以此来降低随机噪声对标定结果的影响。



图 4.14 加速度计两位置法标定示意图

根据式 (4.25) 和式 (4.26) 可对加速度计的零偏和比例因子误差进行估计:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{b}} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_{\rm up} + \tilde{\mathbf{f}}_{\rm down}}{2} \\ \delta \hat{\mathbf{s}} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_{\rm up} - \tilde{\mathbf{f}}_{\rm down}}{2g} - 1 \end{cases}$$
(4.27)

式中, ĥ和 δŝ 分别为加速度计零偏和比例因子误差的估值。

²对上式中重力加速度的正负号有困惑的读者,建议回顾第3章3.5.3.2小节的内容

两位置法标定是一种简单而实用的通用技术,常用于精密机械和测绘领域,以校正 设备的常值误差。该方法通过让仪器在两个相反的位置进行测量,实现误差的正负相互 抵消。例如,在全站仪的垂直角标定中就采用了这种方法。加速度计的两位置法标定具 有很强的鲁棒性。在实际标定操作中,往往难以使加速度计完全精确地指向铅垂的上下 方向,而是会与铅垂线存在一个小的夹角 θ,如图4.15所示。因此,加速度计的测量模 型相应地调整为

$$\tilde{f}'_{up} = b + (1 + \delta s)g\cos\theta \tag{4.28}$$

$$\tilde{f}_{down}' = b - (1 + \delta s)g\cos\theta \tag{4.29}$$

因此,加速度计的零偏和比例因子的估计值为

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}'_{\rm up} + \tilde{\mathbf{f}}'_{\rm down}}{2}, \quad \delta \hat{\mathbf{s}} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}'_{\rm up} - \tilde{\mathbf{f}}'_{\rm down}}{2\mathrm{g}\cos\theta} - 1 \tag{4.30}$$



图 4.15 加速度计两位置法静态标定的鲁棒性示意图(考虑水平基准有偏角)

可见,加速度计零偏的标定完全不受该倾角的影响;而对于比例因子误差的标定, θ 的影响也比较小,因为在小角度下 $\cos \theta \approx 1$ 。例如,假设 θ 为 0.2°,它对比例因子误 差估计所造成的影响仅为 1 ppm。

4.5.2.2 六位置法静态标定

通常情况下, IMU 包含相互正交的三轴加速度计。通过将每个轴的加速度计分别 朝上和朝下静止测量,则可实现三轴加速度计的标定。在每次静止状态下,同时记录三 轴加速度计的输出,而不仅仅是一个轴的输出,这样不仅可以标定出每个轴的零偏和比 例因子误差,还能够标定三轴加速度计之间的交轴耦合误差。三轴加速度计的测量模型 如下:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{\mathbf{b}} = \mathbf{f}^{\mathbf{b}} + \mathbf{b}_{\mathbf{a}} + \mathbf{S}_{\mathbf{a}} \mathbf{f}^{\mathbf{b}} + \mathbf{N}_{\mathbf{a}} \mathbf{f}^{\mathbf{b}} + \mathbf{w}_{\mathbf{a}}$$
(4.31)

式中, $\tilde{\mathbf{f}}^{\mathbf{b}} = [\tilde{\mathbf{f}}_x \quad \tilde{\mathbf{f}}_y \quad \tilde{\mathbf{f}}_z]^\top$ 为加速度计测量值向量, 上标 "~"表示传感器的实际输出, $\tilde{\mathbf{f}}_x$ 、 $\tilde{\mathbf{f}}_y \quad \tilde{\mathbf{f}}_z$ 分别为 x、y、z 轴加速度计的测量值; $\mathbf{f}^{\mathbf{b}} = [\mathbf{f}_x \quad \mathbf{f}_y \quad \mathbf{f}_z]^\top$ 为加速度计感知的真实 比力向量; $\mathbf{b}_a = [\mathbf{b}_{a,x} \quad \mathbf{b}_{a,y} \quad \mathbf{b}_{a,z}]^\top$ 为加速度计常值零偏向量; \mathbf{S}_a 为加速度计的比例因子

误差矩阵; \mathbf{N}_{a} 为加速度计的交轴耦合误差矩阵; $\mathbf{w}_{a} = \begin{bmatrix} w_{a,x} & w_{a,y} & w_{a,z} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ 为加速度计的 随机噪声向量。比例因子和交轴耦合误差矩阵记作

$$\mathbf{S}_{a} = \begin{bmatrix} \delta s_{a,x} & 0 & 0 \\ 0 & \delta s_{a,y} & 0 \\ 0 & 0 & \delta s_{a,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{a} = \begin{bmatrix} 0 & m_{a,xy} & m_{a,xz} \\ m_{a,yx} & 0 & m_{a,yz} \\ m_{a,zx} & m_{a,zy} & 0 \end{bmatrix}$$

式中, $\delta s_{a,x}$ 、 $\delta s_{a,y}$ 、 $\delta s_{a,z}$ 分别为 x、y、z 轴加速度计的比例因子误差, $m_{a,yx}$ 表示 y 轴 加速度计对 b 系 x 轴比力的敏感系数(交轴耦合),详见第4章4.2.3小节。

在实际的标定过程中,可以通过对加速度计的一段静态数据求平均来降低随机噪声 的干扰幅度,使其影响明显小于待标定的零偏参数。在这种情况下,可以忽略式 (4.31) 中的噪声项,并改写为如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_{x} \\ \tilde{f}_{y} \\ \tilde{f}_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \delta s_{a,x} & m_{a,xy} & m_{a,xz} \\ m_{a,yx} & 1 + \delta s_{a,y} & m_{a,yz} \\ m_{a,zx} & m_{a,zy} & 1 + \delta s_{a,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x} \\ f_{y} \\ f_{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{a,x} \\ b_{a,y} \\ b_{a,z} \end{bmatrix}$$
(4.32)

上式可进一步写为齐次方程形式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_{x} \\ \tilde{f}_{y} \\ \tilde{f}_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \delta s_{a,x} & m_{a,xy} & m_{a,xz} & b_{a,x} \\ m_{a,yx} & 1 + \delta s_{a,y} & m_{a,yz} & b_{a,y} \\ m_{a,zx} & m_{a,zy} & 1 + \delta s_{a,z} & b_{a,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x} \\ f_{y} \\ f_{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$
(4.33)

上式等号右边的矩阵包含了 12 个待标定的加速度计误差参数,记为 M。为求解 M,将加速度计按图4.16所示的方式,分别让 x、y、z 轴加速度计朝上和朝下静置,共采集 6 个位置的静态数据。



图 4.16 加速度计标定的六位置示意图

对应图4.16所示的 6 个位置, IMU 感知的真实比力向量为

$$\mathbf{f}_{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{2} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{4} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{5} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{6} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{g} \\ (4.34) \end{bmatrix}$$

式中,比力向量的下标 1~6 分别表示加速度计 x 轴朝上、x 轴朝下、y 轴朝上、y 轴朝下、z 轴朝上、z 轴朝下。

按式 (4.33) 的形式写出每个位置对应的加速度计测量模型,可合并为如下分块矩阵:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{1} & \tilde{\mathbf{f}}_{2} & \tilde{\mathbf{f}}_{3} & \tilde{\mathbf{f}}_{4} & \tilde{\mathbf{f}}_{5} & \tilde{\mathbf{f}}_{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \delta \mathbf{s}_{a,x} & \mathbf{m}_{a,xy} & \mathbf{m}_{a,xz} & \mathbf{b}_{a,x} \\ \mathbf{m}_{a,yx} & 1 + \delta \mathbf{s}_{a,y} & \mathbf{m}_{a,yz} & \mathbf{b}_{a,y} \\ \mathbf{m}_{a,zx} & \mathbf{m}_{a,zy} & 1 + \delta \mathbf{s}_{a,z} & \mathbf{b}_{a,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1} & \mathbf{f}_{2} & \mathbf{f}_{3} & \mathbf{f}_{4} & \mathbf{f}_{5} & \mathbf{f}_{6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4.35)$$

上式可记作

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}\mathbf{A} \tag{4.36}$$

其中,

$$\begin{split} \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{1} & \tilde{\mathbf{f}}_{2} & \tilde{\mathbf{f}}_{3} & \tilde{\mathbf{f}}_{4} & \tilde{\mathbf{f}}_{5} & \tilde{\mathbf{f}}_{6} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1} & \mathbf{f}_{2} & \mathbf{f}_{3} & \mathbf{f}_{4} & \mathbf{f}_{5} & \mathbf{f}_{6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 + \delta \mathbf{s}_{\mathbf{a},\mathbf{x}} & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{xy}} & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{xz}} & \mathbf{b}_{\mathbf{a},\mathbf{x}} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{yx}} & 1 + \delta \mathbf{s}_{\mathbf{a},\mathbf{y}} & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{yz}} & \mathbf{b}_{\mathbf{a},\mathbf{y}} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{zx}} & \mathbf{m}_{\mathbf{a},\mathbf{zy}} & 1 + \delta \mathbf{s}_{\mathbf{a},\mathbf{z}} & \mathbf{b}_{\mathbf{a},\mathbf{z}} \end{bmatrix} \end{split}$$

可以看出, M 矩阵中包含 12 个待估的加速度计误差参数, 六位置法观测中共有 18 个方程, 存在一定的冗余观测, 可用最小二乘法求解待估参数矩阵:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{A}^{\top} \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top}\right)^{-1} \tag{4.37}$$

上式即加速度计的静态六位置法标定原理。

4.5.3 陀螺的两位置法标定原理

下面介绍基于角位置转台的陀螺两位置法标定的基本原理,如图4.17所示。以 z 轴 陀螺的标定过程为例进行说明。在标定过程中,将 z 轴陀螺的敏感轴朝上安装,并与转 台的铅垂旋转轴对齐。由于可以控制转台按正向和反向转动,因此只需一次安装,无需 调整陀螺的安装方向即可完成两位置法标定。具体的标定步骤如下:

首先,控制转台从静止按设定的角速率绕陀螺敏感轴正向转动一个指定角度并停止,记录该过程中陀螺的原始测量值。然后,控制转台以大致相同的角速率绕陀螺敏感

轴反向转动相同角度,并记录该过程中陀螺的测量值。其中,预设的转台转动角速率值 建议尽量取实际应用陀螺的典型角速率(测试和标定方法要能反映惯导的应用类型,同 时且非常重要的是要反映传感器和系统的实际工作环境[17, p148]),例如车载环境典型 的转弯角速率为 20°/s~40°/s,那么标定车载 IMU 时可以采用这一角速率范围。此外, 转动的角度建议选择 360°或其整数倍,这样利用角度传感器控制转台完成一圈或多圈 的转动,并回到原始角度位置,是更容易精确操控的。



图 4.17 转台分别绕 z 轴正转和反转大小相等的角度 α

根据第3章3.5.3.1小节分析可知: 在标定过程中, 陀螺感知的角速度是转台转动角 速度和地球自转角速度垂向分量之和。根据图4.17, 容易写出 z 轴陀螺的角速度测量模型:

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{IE}} = (1 + \delta \mathbf{s}_{\mathrm{g},\mathrm{z}}) \left(\omega_{\mathrm{T}} + \omega_{\mathrm{e},\mathrm{U}} \right) + \mathbf{b}_{\mathrm{g},\mathrm{z}} + \mathbf{w}_{\mathrm{g},\mathrm{z}}$$
(4.38)

$$\tilde{\omega}_{\bar{\aleph}} = (1 + \delta \mathbf{s}_{g,z}) \left(-\omega_{\mathrm{T}} + \omega_{\mathrm{e},\mathrm{U}} \right) + \mathbf{b}_{\mathrm{g},z} + \mathbf{w}_{\mathrm{g},z}$$
(4.39)

式中, $\tilde{\omega}_{E}$ 、 $\tilde{\omega}_{Q}$ 分别为转台正转、反转时 z 轴陀螺的角速度观测值; $b_{g,z}$ 和 $\delta s_{g,z}$ 分别为 z 轴陀螺的零偏和比例因子误差,为待标定的参数; $w_{g,z}$ 为 z 轴陀螺的随机噪声; ω_{T} 为 转台的转动角速度值,该值不必保持恒定,可随时间变化; $\omega_{e,U}$ 为地球自转角速度向量 在当地垂向(向上)的投影分量。根据式(2.70),可知 $\omega_{e,U} = \omega_{e} \sin \varphi$,其中 ω_{e} 为地球 自转角速度值, φ 为当地纬度。

式(4.38)和式(4.39)等号两边对时间积分,容易写出转台正转和反转情况下 z 轴陀 螺的角度增量测量模型³:

$$\tilde{\alpha}_{1} = \int_{0}^{\Delta t} \tilde{\omega}_{\mathbb{E}} dt = b_{g,z} \Delta t + (1 + \delta s_{g,z}) \alpha + (\omega_{e} \sin \varphi) \Delta t$$
(4.40)

$$\tilde{\alpha}_2 = \int_0^{\Delta t} \tilde{\omega}_{\bar{\wp}} dt = b_{g,z} \Delta t - (1 + \delta s_{g,z}) \alpha + (\omega_e \sin \varphi) \Delta t$$
(4.41)

式中, $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$ 分别为转台正转和反转过程中 z 轴陀螺的角增量测量值; α 为转台的实际转角; Δt 为覆盖转台完整转动过程时长,即陀螺积分时长。

³此处,由于陀螺随机噪声无法被标定,因此未考虑其时间积分项。

根据式 (4.40) 和式 (4.41) 易得 z 轴陀螺的零偏和比例因子误差估计为

$$\mathbf{b}_{\mathrm{g,z}} = \frac{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2}{2\Delta t} - (\omega_\mathrm{e}\sin\varphi) \tag{4.42}$$

$$\delta s_{g,z} = \frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}{2\alpha} - 1 \tag{4.43}$$

上述方法使用的是陀螺的积分角度变化和转台的转角,而不是角速度,因此被称作 角位置标定法。相比于角速率标定方法,角位置标定对转台要求低,更加经济实惠和方 便实用。

在实际的标定过程中, 陀螺仪测量的是角速率或采样间隔内角度增量。在标定模型中, 转角的观测值可通过陀螺仪输出的角速率按时间积分或是通过角增量观测值累加 得到。正转和反转的陀螺观测数据应确保覆盖完整的转动过程, 即从转动开始前直至转 动后完全停稳, 并且确保正反转过程中数据采集的时间长度严格一致, 如图 4.18所示。



图 4.18 正转和反转的数据截取(确保时长相等)

需要强调的是,在采用角位置法进行陀螺仪标定时,其精度可能会受到陀螺仪随机 噪声的影响。主要是因为无法像加速度计两位置法标定那样对陀螺的观测值进行长时 间平均来减小噪声的影响。尽管根据陀螺仪输出进行积分计算转角在本质上可以起到 一定的平均滤波作用,却往往不足以把陀螺仪噪声的幅度及其影响降至低于陀螺仪零 偏的级别。

因此,可以考虑采用在加速度计六位置法标定中收集的静态陀螺数据来估计更精确的陀螺零偏。通过对这些陀螺静态观测数据进行长时间的平均处理,可以对每个单轴 陀螺仪执行两位置法零偏标定。此时,陀螺感知的真实输入只有地球自转角速度,此时 单轴陀螺的测量模型为

$$\bar{\omega}_{\rm up} = \mathbf{b}_{\rm g} + (1 + \delta \mathbf{s}_{\rm g})\omega_{\rm e}\sin\varphi \tag{4.44}$$

$$\bar{\omega}_{\rm down} = b_{\rm g} - (1 + \delta s_{\rm g})\omega_{\rm e}\sin\varphi \tag{4.45}$$

式中, $\bar{\omega}_{up}$ 和 $\bar{\omega}_{down}$ 分别为陀螺敏感轴朝上和朝下时的角速度观测的均值。因此,容易 计算出对应的陀螺零偏

$$\mathbf{b}_{\mathrm{g}} = \frac{\bar{\omega}_{\mathrm{up}} + \bar{\omega}_{\mathrm{down}}}{2} \tag{4.46}$$

然而,根据上述模型计算得到的陀螺仪比例因子误差的精度可能相对较低。这主要 是因为比例因子误差的系数是地球自转角速度,该数值相对较小,往往无法充分激励出 比例因子误差的影响。此外,尽管可以借助与加速度计类似的静态六位置法来标定陀螺 仪的交轴耦合误差,但是因为转动过程中水平轴陀螺感知的地球自转分量是交变的,需 要精确的绝对航向才能改正其影响。因此实现陀螺仪交轴耦合的严格标定相对复杂,感 兴趣的读者可以查阅参考文献[27]。

综上所述,为了实现较高的标定精度,可以综合角位置法和静态两位置法的优点对 陀螺仪误差进行精确标定。例如,可以采用式 (4.46) 对陀螺仪的零偏进行标定,同时利 用式 (4.42) 和式 (4.43) 来估计陀螺仪的比例因子误差。这种综合方法不仅能够有效利 用不同标定手段的特性,还能在一定程度上克服各自的局限性,从而提高陀螺仪的整体 标定精度和可靠性。

4.5.4 IMU 误差补偿

误差参数标定后,可对 IMU 原始数据进行误差补偿,得到更高精度的比力和角速 率观测值。误差补偿模型(4.17)和模型(4.18)重写如下:

$$\mathbf{f}_{c} = \begin{bmatrix} 1 + \delta \mathbf{s}_{a,x} & \mathbf{m}_{a,xy} & \mathbf{m}_{a,xz} \\ \mathbf{m}_{a,yx} & 1 + \delta \mathbf{s}_{a,y} & \mathbf{m}_{a,yz} \\ \mathbf{m}_{a,zx} & \mathbf{m}_{a,zy} & 1 + \delta \mathbf{s}_{a,z} \end{bmatrix}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{b}_{a} \right)$$
(4.47)

$$\boldsymbol{\omega}_{c} = \begin{bmatrix} 1 + \delta s_{g,x} & m_{g,xy} & m_{g,xz} \\ m_{g,yx} & 1 + \delta s_{g,y} & m_{g,yz} \\ m_{g,zx} & m_{g,zy} & 1 + \delta s_{g,z} \end{bmatrix}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{b}_{g})$$
(4.48)

式中, \mathbf{f}_c 和 $\boldsymbol{\omega}_c$ 分别为误差补偿后的比力和角速度向量, \mathbf{f} 和 $\mathbf{\tilde{\omega}}$ 分别为误差补偿前的比力和角速度原始测量值,其它符号定义见本章4.2.7小节。

4.5.5 系统级标定

惯性器件或 IMU 的标定根据参考信息的不同,可分为分立标定法和系统级标定法。 分立标定法直接利用陀螺仪和加速度计的输出作为观测量,并通过转台等专业设备来 提供惯性传感器测量的直接参考,如高精度的角速度(相对转角)和加速度。通常,这 种方法使用最小二乘法对数据进行处理,从而计算出各种惯性器件的误差参数。前面介 绍的加速度计静态六位置法标定及陀螺的两位置标定均属于分立标定法的范畴。

系统级标定法是在 20 世纪 80 年代发展起来的一种标定技术。与分立标定方法不同,系统级标定通常不依赖于专业设备,其参考信息主要来自于测试现场易于获取的间接观测,而非由专业设备提供的角速度(相对转角)或加速度(比力)信息。在惯性导航系统的工作过程中,加速度计和陀螺仪的各项误差会导致位置、速度和姿态等导航结果的误差。因此,如果能够提供某些导航结果的参考信息,并建立惯性器件误差与导航

结果误差之间的关系,就有可能通过导航结果的误差来反推 IMU 器件误差,从而实现 一种间接标定。例如,对于静止在地面上的惯性导航系统,其姿态应保持不变,速度为 零(或位置不变)。在这种情况下,可以将"姿态变化为零"和"速度为零"作为参考; 而由于受陀螺仪和加速度计误差的影响,惯性导航解算出的姿态会随时间出现漂移,速 度也不会保持为零;基于这种差异,可以通过合理设计实验(如将惯性测量单元 IMU 静置于多个不同的有对称性的方位)来有效估计和补偿某些陀螺仪和加速度计的常值 零偏误差。

第5章 惯导初始对准

5.1 引言

惯性导航解算是一个时间积分过程,通过加速度的积分可以获得速度和位置信息, 通过对角速度的积分则能够得到载体的姿态。在进行积分运算时,必须在导航开始之前 预先确定积分常数(也称积分初值)。该过程通常被称为惯性导航的初始化,或者称为 初始对准。初始化参数主要包括位置、速度和姿态,有时还需要对惯性传感器的零偏、 比例因子误差等导航状态以外的参数进行增广估计。

- 初始位置和速度:用三维向量 r₀ 和 v₀ 表示,位置通常也用大地坐标(纬度、经度和大地高)来描述。
- 初始姿态:建立载体坐标系(b系)和导航坐标系(n系)之间的空间相对朝向关系,用姿态表达式来表示,包括欧拉角、方向余弦矩阵或四元数等形式,详见第6章6.2节。
- 惯性传感器误差(非必需): 陀螺和加速度计的零偏、比例因子误差等。这些误差具有一定的随机变化特性,无法在出厂条件下完全标定,例如陀螺仪和加速度计零偏随时间的漂移及逐次上电重复性误差。这种对传感器误差的初始化也称现场标定。

惯性导航系统的初始位置和速度通常相对容易获取。例如,在 GNSS 信号可用的 情况下,无论载体处于静止还是运动状态,GNSS 接收机均能提供准确的初始位置和速 度。然而,从外部观测或其他传感器直接获取"北向"和"东向"等方向信息则较为困 难。因此,姿态的初始化是惯导初始对准的主要难点。姿态初始对准涉及水平姿态角和 航向的确定,其中航向的初始化又是姿态初始对准的主要难点。关于惯导初始对准的问 题,行业内已有众多研究,且大部分研究聚焦于航向初始化。严格来说,惯导的初始对 准应当涵盖上述所有初始条件的确定过程。但在实际应用中,人们通常将初始对准特指 为姿态初始化过程。为了描述方便,在后续章节中,将不对此概念进行严格区分。

惯导的初始对准方法,针对不同的载体(如飞机、地面车辆、舰艇等)、不同的应 用环境(如是否存在外部辅助信息)、不同的对准精度要求以及不同精度等级的惯性导 航设备,可能会有所差异。以下是对初始对准方法的一种粗略分类方式:

• 根据载体的运动状态,可分为静基座对准(静对准)和动基座对准(动对准)。

- 按对准的阶段,可分为粗对准和精对准。粗对准要求系统尽快实现一定精度的姿态确定,为后续精对准打基础,要求速度快、精度可以低一些。精对准则在粗对准的基础上,利用外部导航定位观测或运载体在地表静止所形成的约束条件(例如东向陀螺输出为零和速度为零等),对粗对准确定的姿态进行精化,并借机估计一部分传感器误差。
- 根据对准过程中对外部信息的需求,可分为自主式对准和非自主式对准。自主式 对准是指惯性导航系统仅依靠加速度计感知的重力加速度和陀螺感知的地球自

转角速度向量,通过解析方法实现对准。非自主式对准则通过引入外部位置(如 GNSS 定位)、速度(如 GNSS 或里程计测速)或姿态(如 GNSS 多天线测姿或 磁罗盘结果)等辅助信息作为观测数据,采用数据融合技术,精确计算惯性导航 系统的初始姿态。

惯导初始对准的研究意义重大,内容非常丰富,不少杰出的学者和前辈甚至在这一 课题的研究中耗费了毕生心血。对于更详尽的理论和讨论可查阅参考文献[12,33]。全面 介绍惯导初始对准的方法和理论并非本章的目的,也超出了本书的范畴。本章内容将限 定在高精度惯导的解析粗对准这一基础方法,这是一种在静基座条件下实施的自主式 对准技术。

本章将首先阐述初始对准的基本原理。通过直观易懂的方式解释水平姿态角与航向角如何被确定出来,并解释姿态对准误差与惯性传感器误差之间的关系。通过简单的误差分析计算示例来加深对这些概念的理解。然后,讨论初始对准所需的静止时间,因为在许多应用场景中,快速完成惯导系统的初始对准至关重要。最后,介绍高精度惯性导航系统的解析粗对准原理及其误差分析,解析粗对准以更加严谨和抽象的方式联合求解姿态表达式,也体现了姿态估计方法的本质——双矢量定姿(Wahba问题[34])原理。学习本章内容将涉及姿态表达和误差扰动分析等知识点,它们还将在本书的第6章和第7章专门介绍。

5.2 惯导初始对准的一般原理和要求

首先以相对直观且易于理解的方法,阐述水平姿态角与航向角初始化的一般性原理,将姿态对准过程划分为两个阶段:一是通过加速度计调平(accelerometer leveling) 来确定水平姿态角(横滚角和俯仰角),二是通过陀螺寻北(gyro compassing)来确定 航向角。在此基础上,分析影响初始对准精度的误差源,引导读者思考和理解初始对准 的误差分析方法。加速度计调平和陀螺寻北的概念最初源自平台式惯性导航系统,较为 直观。据此得出的结论同样适用于捷联惯导的解析粗对准。

在分析过程中,不妨假定 IMU 的坐标轴与当地的北向、东向和垂向完全对齐,即 b 系与 n 系重合。这种假设在分析与地理因素相关的影响时,给读者直观理解提供了极 大的便利。因此,后面会用"东向偏差"和"北向偏差"来描述特定方向的惯性传感器 误差,例如"东向陀螺零偏"、"北向加速度计误差"等。尽管假设 b 系与 n 系重合是 一种理想化、简单化的特殊情形,但是由此得出的结论很容易推广到一般情况。这是因 为东向偏差和北向偏差可由 IMU 三轴传感器误差的线性组合得到,线性组合的系数取 决于 IMU 的实际朝向,当 3 个轴的传感器选型一致时,投影到任何方向的误差水平都 与单个轴一致。

5.2.1 初始对准的重要性

正如前文所述,惯导初始化过程至少需要确定惯导的初始位置、初始速度和初始姿态。初始对准过程必须实现以下两个主要目标:

- 确定初始条件:在对陀螺仪和加速度计数据进行积分运算前,必须准确获取积分 初值,即系统的位置、速度和姿态初始参数。
- 保障惯导误差模型的线性化条件:大部分组合导航滤波器都基于线性模型而设计,为此需要对非线性的运动方程进行线性化处理,使各导航参数误差之间符合线性关系。为确保姿态一阶线性化后的残余误差在可接受范围内,初始姿态必须足够精确,即满足小角度误差假设,详见7.2节。

通常情况下,初始姿态的精确度越高,线性化过程中的一阶近似也越精确。实验表明,对于组合导航系统来说,只要初始姿态对准误差小于 6°(即 0.1 rad),一般认为数据融合滤波器中的线性假设成立。然而,在没有任何辅助信息的情况下,长时间进行惯性导航,则精准的初始对准变得非常关键。因为初始对准误差会在后续的惯性导航解算中随时间或距离逐步放大,进而导致显著的位置误差和姿态漂移,正所谓"失之毫厘,谬以千里"。

5.2.2 位置和速度的初始化

惯性导航系统无法自主确定其初始位置,必须由外部信息或其它导航系统提供。这 些导航系统可以是 GNSS 接收机、其它 INS,或者地面无线电导航设备等。当然,也可 以将 INS 放置在已知坐标的控制点上来获取初始位置。此外,若在前次使用 INS 后,载 体的位置保持不变,则可将前次存储的结束时刻位置用作本次导航的初始位置。该策略 在车载导航领域得到广泛应用,尤其适用于地下车库等 GNSS 信号受限环境中的 INS 初始化。如果陀螺的精度足够高(角速度测量误差远小于地球自转角速度大小),惯导 也能在确定水平姿态角后依据两个水平轴上的陀螺仪输出来计算出当地纬度。然而,即 便是高精度的惯导,也无法独立确定初始经度,因为经度是人为定义的地理参考量,而 非物理实体量,详见第2章2.3.2.1小节。

同样,惯性导航系统也无法自行确定其初始速度。如果 INS 从对地静止状态开始 启动,初始速度可以简单地设为零。GNSS 接收机或多普勒雷达等则能够在动态条件下 为惯导提供准确的三维速度观测。

需要特别指出的是,当惯导的位置或速度信息由其他传感器提供时,通常需要进行 杆臂补偿。例如,GNSS 接收机提供的是 GNSS 天线相位中心的位置和速度观测,而惯 导需要的是 IMU 测量中心的位置和速度。在一般安装条件下,这两个点通常并不重合。 杆臂补偿的具体实现详见第8章8.3节。

5.2.3 横滚和俯仰角的初始化(加速度计调平)

当 IMU 静止在地面上时,三轴加速度计的测量值反映了为克服重力加速度而产生的比力分量。如图 5.1所示,载体俯仰角造成的 x 轴加速度计比力测量值为

$$f_x = g\sin\theta \tag{5.1}$$

式中, f_x 为 x 轴加速度计的理论测量值, g 为当地重力加速度大小, θ 为俯仰角(可理 解为 x 轴与水平面的夹角, 定义详见第6章6.2.1小节)。



图 5.1 水平姿态角测量示意图(以俯仰角为例)

因此,根据前向加速度计的输出可计算出载体的俯仰角:

$$\theta = \sin^{-1} \frac{f_x}{g} \tag{5.2}$$

当俯仰角为小角度时,上式可近似为

$$\theta \approx \frac{f_x}{g}$$
 (5.3)

根据静止加速度计输出计算水平姿态角的过程称作加速度计调平。这一术语源自 于平台式惯性导航系统或惯性稳定平台,其中重力在稳定平台的东向和北向的水平分 量理论上应该为零。如果这些方向上的加速度计读数不为零,则表明平台尚未达到水平 状态。需要通过不断调整其水平姿态角直至加速度计在东向和北向输出为零,从而确认 系统已调平。实际的加速度计测量值含有误差,其测量模型表示为

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{f}_{\mathbf{x}} = \mathbf{g}\sin\theta + \delta \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \tag{5.4}$$

式中, f_x 为水平加速度计实际测量值, δf_x 为加速度计的测量误差。因此,加速度计调 平的水平姿态角计算值为

$$\hat{\theta} \approx \frac{\hat{f}_x}{g} = \frac{f_x + \delta f_x}{g}$$
(5.5)

俯仰角误差 δθ 的一阶近似为

$$\delta \theta \approx \frac{\delta f_x}{g}$$
 (5.6)

横滚角的初始对准误差分析与之类似。由此可以归纳,水平姿态角对准误差的通用 计算公式为

当倾角为小角度时,静态测量过程中水平方向的加速度计实际感知的比力基本为 零,比例因子误差影响甚微。主要影响因素是加速度计的逐次上电零偏重复性和噪声。

$$\delta f_x = b_a + w_a \tag{5.8}$$

因此,加速度计零偏对水平姿态角初始化精度的影响可用式(5.7)进行定量评估,即

$$\delta\theta^{\rm bias} = \frac{\rm b_a}{\rm g} \tag{5.9}$$

式中, ba 为加速度计零偏, $\delta \theta^{\text{bias}}$ 为零偏导致的横滚角或俯仰角误差。

根据上式,假设加速度计的零偏为1000mGal(相当于1mg),由此引起的水平姿态 角初始化误差约为1mRad(即0.06°)。由此可见,对于加速度计调平而言,达到5.2.1节 所提的6°的对准精度是很容易实现的。即便是低成本的消费级IMU芯片,也能准确 地确定水平姿态角。

加速度计测量噪声的影响,可通过对静止时段内加速度计的输出求平均来降低其 影响,导致的水平姿态角不确定度(δθ^{noise})为

$$\delta\theta^{\text{noise}} = \frac{\text{RMS}\left(\bar{w}_{a}\right)}{\text{g}} = \frac{\text{VRW}}{\text{g}\sqrt{T_{a}}}$$
(5.10)

式中, T_a 为静止时长, \bar{w}_a 为对 T_a 时段内白噪声的平均值, 易知 \bar{w}_a 仍是随机变量, RMS (\bar{w}_a) 为其均方根。

理论上静止时间越长,传感器噪声的影响越小,但是一般当噪声的影响明显小于加速度计零偏影响时(工程应用中常设置为 1/2),则可不必再延长静止时间,也即

$$\delta\theta^{\text{noise}} < \frac{1}{2}\delta\theta^{\text{bias}} \tag{5.11}$$

将式(5.10)代入式(5.11)可得,加速度计调平要求的静止时长应满足:

$$T_{a} > \left(\frac{2VRW}{b_{a}}\right)^{2} \tag{5.12}$$

以第4章介绍的 MEMS IMU-ADIS16465 为例,计算加速度计调平所需的静止时长,根据产品手册知道该 IMU 的零偏重复性误差为 1.4mg, VRW 为 0.012m/s/√h。代入

式(5.12),可得

$$T_{a} > 4 \times \left(\frac{0.012 \text{ m/s/}\sqrt{h}}{1.4 \text{ mg}}\right)^{2}$$
$$\approx 4 \times \left(\frac{0.0002 \text{ m/s}^{2}/\sqrt{\text{Hz}}}{1.4 \times 0.001 \times 10 \text{ m/s}^{2}}\right)^{2}$$
$$= 0.8 \times 10^{-3} \text{ s}$$

可见,该型号 IMU 加速度计调平所需的静态平均时长甚至小于 IMU 的采样间隔, 所以一般来说加速度计噪声对水平姿态角的初始化影响几乎可以忽略不计。在载体并 非完全静止,而是存在一定运动加速度扰动的情况下,同样可以根据加速度计的输出来 近似计算初始水平姿态角。当然,需要在运动干扰过程中确定水平姿态角的情况相对较 少。这种情况下,水平运动加速度(即水平前向和侧向加速度)对水平姿态初始对准的 影响为

$$\delta\theta = \frac{a_{\rm H}}{\rm g} \tag{5.13}$$

式中, a_H 表示水平方向上的运动加速度。

从式(5.13)可以看出,为了达到水平姿态角初始化误差小于 6°的目标,水平运动加速度(或是在初始化时段内的平均值)应小于 1 m/s²。

5.2.4 航向初始化(陀螺寻北)

完成加速度计调平后,还需确定惯性传感器坐标系在水平面上的方位(航向),即 计算惯性传感器坐标系相对于真北向的朝向。利用陀螺静态观测确定初始航向的过程 被称作陀螺寻北,又称罗经对准 (gyro compassing)。陀螺寻北需满足以下条件:

- 陀螺必须足够精确,以准确测量地球自转角速度。通常要求陀螺零偏(逐次上电重复性误差)比地球自转角速度(约15°/h)至少小一个数量级。
- 已完成水平姿态角的计算。
- IMU 必须处于严格静止状态。

5.2.4.1 陀螺寻北

陀螺寻北的原理可用图 5.2说明。假设 x 和 y 轴陀螺已位于当地水平面内,且分别 与载体的前向和右向一致,又可称作前向陀螺和右向陀螺。所谓寻北即确定前向陀螺与 地理北向的夹角。从图中容易得到前向和右向陀螺的角速度观测是地球自转角速度的 水平分量 $\omega_{ie,H}$ (模长为 $\omega_e \cos \varphi$)按照航向的再次投影,分别是

$$\omega_{\rm F} = \omega_{\rm e} \cos \varphi \cos \psi \tag{5.14}$$

$$\omega_{\rm R} = -\omega_{\rm e} \cos \varphi \sin \psi \tag{5.15}$$

式中, $\omega_{\rm F}$ 和 $\omega_{\rm R}$ 分别为前向和右向陀螺的理论角速度测量值, φ 为纬度, $\omega_{\rm e}$ 为地球自转角速率, ψ 为待确定的初始航向。



图 5.2 陀螺寻北原理示意图

根据式(5.14)和(5.15)可计算惯导的初始航向:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{-\omega_{\rm R}}{\omega_{\rm F}} \right) \tag{5.16}$$

5.2.4.2 陀螺寻北误差

为简化分析,假设 b 系与 n 系重合,即 IMU 的初始航向角为零。此时,理想情况 下北向陀螺输出为地球自转角速度在水平方向的投影 $\omega_{ie,H}$ (模长为 $\omega_e \cos \varphi$),东向陀 螺输出为零。受传感器误差影响,东向陀螺的实际输出不为零,北向陀螺输出为理想值 与误差之和 $\omega_{ie,H} + \delta \omega_N$,如图 5.3所示。图中 N'和 E'分别表示与实际陀螺输出相符的 "计算北向"和"计算东向"坐标轴,沿此"计算东向"安装的陀螺输出为零;此时计算 的航向角(即"北向"绕 n 系 z 轴转动到与 b 系前向对齐所转动的角度)即航向误差。 根据图中的几何关系容易算得初始航向误差为

$$\delta\psi = -\tan^{-1}\frac{\delta\omega_{\rm E}}{\omega_{\rm e}\cos\varphi + \delta\omega_{\rm N}}\tag{5.17}$$

式中, $\delta\psi$ 为航向初始对准误差(单位 rad), $\delta\omega_{\rm E}$ 和 $\delta\omega_{\rm N}$ 分别为陀螺对地球自转角速度的东向和北向分量的测量误差。

如前面所述,用于静态寻北的惯导,其陀螺的误差必须远小于地球自转角速率,即 $\delta\omega_{\rm E}$ 和 $\delta\omega_{\rm N}$ 对于 $\omega_{\rm e}$ 而言是小误差量。因此,式(5.17)可近似为

$$\delta\psi \approx -\tan^{-1}\frac{\delta\omega_{\rm E}}{\omega_{\rm e}\cos\varphi} \approx \frac{-\delta\omega_{\rm E}}{\omega_{\rm e}\cos\varphi}$$
(5.18)

尽管式(5.18)是在 b 系与 n 系重合的假设下得出的,但其结论对于一般情形仍然适用。下面将通过数学推导进一步阐释。



图 5.3 陀螺误差对寻北精度的影响

考虑陀螺的测量误差,式(5.16)可修正为

$$\hat{\psi} = \tan^{-1} \left(\frac{-\tilde{\omega}_{\rm R}}{\tilde{\omega}_{\rm F}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega_{\rm R} + \delta\omega_{\rm R}}{\omega_{\rm F} + \delta\omega_{\rm F}} \right)$$
(5.19)

式中, $\hat{\psi}$ 为含有误差的航向角估计值, $\hat{\psi} = \psi + \delta \psi$; $\tilde{\omega}_{\rm F}$ 和 $\tilde{\omega}_{\rm R}$ 分别为前向和右向陀螺的 角速度观测值, $\tilde{\omega}_{\rm F} = \omega_{\rm F} + \delta \omega_{\rm F}$, $\tilde{\omega}_{\rm R} = \omega_{\rm R} + \delta \omega_{\rm R}$ 。

式(5.19)围绕各变量的真值进行泰勒展开,并保留至一阶近似,得

$$\hat{\psi} \approx \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{\rm F}} \left(\tilde{\omega}_{\rm F} - \omega_{\rm F} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{\rm R}} \left(\tilde{\omega}_{\rm R} - \omega_{\rm R} \right)$$
 (5.20)

整理可得

$$\delta\psi \approx \frac{\partial \left[\tan^{-1}\left(\frac{-\omega_{\rm R}}{\omega_{\rm F}}\right)\right]}{\partial\omega_{\rm F}} \delta\omega_{\rm F} + \frac{\partial \left[\tan^{-1}\left(\frac{-\omega_{\rm R}}{\omega_{\rm F}}\right)\right]}{\partial\omega_{\rm R}} \delta\omega_{\rm R}$$
$$= -\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{\rm R}}{\omega_{\rm F}}\right)^2} \left[-\frac{\omega_{\rm R}}{\omega_{\rm F}^2} \delta\omega_{\rm F} + \frac{1}{\omega_{\rm F}} \delta\omega_{\rm R}\right] = \frac{\omega_{\rm R}\delta\omega_{\rm F} - \omega_{\rm F}\delta\omega_{\rm R}}{\omega_{\rm F}^2 + \omega_{\rm R}^2}$$
(5.21)

鉴于前向和右向陀螺的理论角速度模长等于地球自转角速率在水平方向的投影,即 $\omega_{\rm F}^2 + \omega_{\rm R}^2 = \omega_e^2 \cos^2 \varphi$,将式(5.14)和式(5.15)代入式(5.21),可得

$$\delta \psi = \frac{-\omega_{\rm e} \cos \varphi \sin \psi \delta \omega_{\rm F} - \omega_{\rm e} \cos \varphi \cos \psi \delta \omega_{\rm R}}{\omega_{\rm e}^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= -\frac{\delta \omega_{\rm F} \sin \psi + \delta \omega_{\rm R} \cos \psi}{\omega_{\rm e} \cos \varphi}$$
(5.22)

结合图 5.2容易看出,式(5.22)中的 $\delta\omega_{\rm F}\sin\psi$ 和 $\delta\omega_{\rm R}\cos\psi$ 分别为前向陀螺误差和右 向陀螺误差在东向的投影分量。因此,二者之和为等效的东向陀螺误差,即

$$\delta\omega_{\rm F}\sin\psi + \delta\omega_{\rm R}\cos\psi = \delta\omega_{\rm E} \tag{5.23}$$

因此,上述推导表明,东向陀螺的误差总是前向和右向陀螺误差的线性组合,与 IMU 的具体朝向无关。式(5.18)的结论具有普遍适用性。假设 IMU 的各轴陀螺精度水 平一致,根据式(5.23)可知,线性组合后的东向陀螺误差与各轴陀螺误差水平相等,则 航向初始对准误差可表示为以下通用形式

航向对准误差 (rad) =
$$\frac{$$
陀螺误差水平}{\omega_{e} \cos \varphi} (5.24)

综合式(5.7)和式(5.24)可以看出,惯导静基座初始对准的姿态误差可表示为如下通用公式:

姿态对准误差 (rad) =
$$\frac{ 传感器误差水平}{ 对准所依赖的有效向量的幅度}$$
 (5.25)

在静态寻北过程中,陀螺感知的地球自转角速率数值极小,比例因子误差和交轴 耦合等陀螺动态误差项的影响可忽略不计。因此,主要误差源是陀螺零偏和噪声,即 $\delta\omega_{\rm E} = b_{\rm g} + w_{\rm g}$ 。其中陀螺零偏的影响为

$$\delta\psi^{\rm bias} = \frac{b_{\rm g}}{\omega_{\rm e}\cos\varphi} \tag{5.26}$$

式中, $\delta\psi^{\text{bias}}$ 为陀螺零偏导致的航向初始对准误差; b_g 为陀螺零偏的逐次上电重复性。

可以看出, 陀螺零偏越大, 寻北精度越低。对于同一惯性导航系统, 所在纬度越高, 寻北误差越大, 尤其在接近南北极时, 误差迅速增加, 直至无法进行寻北, 此时式(5.26)的分母趋近于零。图 5.4展示了 3 个不同精度等级的惯导在静态寻北时的误差曲线。根据式(5.26)可以快速计算高精度惯导的静态寻北精度, 以纬度 30.5°的武汉为例, 对于零偏为 1°/h 的战术级惯性导航系统, 其静态寻北误差约为 4.4°; 而对于零偏为 0.01°/h 的导航级惯性导航系统, 寻北精度可达到 0.04°。为了确保在武汉地区初始对准姿态误差小于 6° (如第5章5.2.1小节所要求的), 陀螺零偏应不大于 1.4°/h。



图 5.4 陀螺寻北误差随纬度变化

与加速度计类似, 陀螺的随机噪声也会影响航向初始对准精度, 通过对静态观测值 的长时间平均处理, 可削弱其影响, 即

$$\delta\psi^{\text{noise}} = \frac{\text{RMS}\left(\bar{w}_{g}\right)}{\omega_{e}\cos\varphi} = \frac{\text{ARW}}{\omega_{e}\cos\varphi\sqrt{T_{a}}}$$
(5.27)

式中, $\delta\psi^{\text{noise}}$ 为陀螺噪声引起的航向对准误差统计量, \bar{w}_{g} 表示平均处理后的白噪声, RMS(\bar{w}_{g})表示其方差的平方根,T_a为平均时长。

与加速度计调平不同(加速度计噪声相比于被测重力为小量), 陀螺噪声幅度相比 于被测地球自转角速度是偏大的, 需要通过长时间求平均来抑制其影响。图 5.5是航向 初始对准精度随静止时长的变化曲线, 表明特定陀螺的寻北误差随静止时间的增加而 减小。然而, 初始对准时间并非越长越好。原因: 一方面, 实际的导航系统希望尽快完 成对准进入导航状态, 这在武器系统等对响应时间敏感的应用中尤为重要。随着静止时 间延长, 单位时间内对准精度提升的收益逐渐递减, 如图中蓝色曲线所示, 10 分钟静 止相较于 5 分钟, 多花了 5 分钟但精度提升有限; 另一方面, 当陀螺噪声降至一定程 度, 其影响将小于零偏误差, 成为陀螺寻北的次要误差源, 不值得继续付出时间代价来 进一步减小噪声的影响。



图 5.5 陀螺噪声和对准时长对寻北精度的影响

因此,在实际应用中,解析粗对准的静止时长需在精度和效率两方面需求间进行权 衡。选择对准时长的经验规则通常是:当角度随机游走(陀螺角速度测量值的随机噪声) 的影响被抑制至不超过陀螺零偏影响的 1/2 时,即可结束静止状态。

$$\delta\psi^{\rm noise} < \frac{1}{2}\delta\psi^{\rm bias}$$

据此可求得惯导所需的静止对准时长为

$$T_{a} = 2 \left(\frac{ARW}{b_{g}}\right)^{2}$$
(5.28)

例如,对于典型的导航级惯性导航系统而言,假设其陀螺零偏为 0.01 °/h, ARW 为 0.002 °/√h,在实际应用中建议的解析粗对准静态时长为 4.8 min,即

$$T_{a} = 2 \times \left(\frac{0.002 \ ^{\circ}/\sqrt{h}}{0.01 \ ^{\circ}/h}\right)^{2}$$

 $= 4.8 \min$

当然,上述对准时长仅基于陀螺噪声的评估,实际应用中可能需要根据对准的具体 工况和载体的静止状态做适当的调整。

5.3 解析粗对准方法及误差分析

加速度计调平和陀螺寻北是平台式惯性导航系统对准的两个关键步骤,旨在将导航平台调整至水平状态和确定初始航向。相比之下,捷联惯性导航系统没有物理平台, 而是构建一个等价的"数学平台",这一过程称为解析粗对准。

解析粗对准利用 IMU 在静态条件下的观测数据,通过数学方法求解 IMU 与参考 坐标系之间的相对姿态关系。这种关系通常由姿态矩阵(也称为坐标变换矩阵或方向余 弦矩阵)或姿态四元数来表示。例如,如果选择导航系(n系)作为参考坐标系,解析 对准的任务便是确定 IMU 的 b 系相对于 n 系的空间姿态,这通常涉及计算一个姿态矩 阵 **C**^h。该矩阵能够将三维向量的坐标从 b 系变换到 n 系。姿态矩阵与姿态角之间可以 相互转换,详见附录A.1节。

5.3.1 解析粗对准原理

解析粗对准过程中,载体相对地面静止,没有线运动和角运动,且初始位置已知。 此时,重力加速度 \mathbf{g}_{p} 和地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 向量在 n 系下的坐标准确已知,即

$$\mathbf{g}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 0\\0\\g \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{e}}\cos\varphi\\0\\-\omega_{\mathrm{e}}\sin\varphi \end{bmatrix}$$
(5.29)

式中,g为当地重力加速度大小,ω。为地球自转角速度大小,φ为初始位置的纬度。 陀螺测量载体相对于惯性空间的转动角速度,可分解为

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} = \boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm b} + \boldsymbol{\omega}_{\rm eb}^{\rm b} \tag{5.30}$$

考虑到解析粗对准过程中载体静止在地面上,相对于地面的转动角速度为零,即 $\omega_{\rm eb} = 0$,因此可得出

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{b} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \begin{bmatrix} \omega_{ib,x} \\ \omega_{ib,y} \\ \omega_{ib,z} \end{bmatrix}$$
(5.31)

式中, $\omega_{ib,x}$, $\omega_{ib,y}$ 和 $\omega_{ib,z}$ 分别表示 x, y, z 轴陀螺的理想(不含误差)角速度测量值。

5.3 解析粗对准方法及误差分析

根据第3章3.5.3.2小节,可知静止在地面上的惯导三轴加速度计的比力输出为

$$\mathbf{f}^{\mathrm{b}} = -\mathbf{g}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{p}} \tag{5.32}$$

即

$$\mathbf{g}_{p}^{b} = -\mathbf{f}^{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_{x} \\ -\mathbf{f}_{y} \\ -\mathbf{f}_{z} \end{bmatrix}$$
(5.33)

式中, f_x 、 f_y 和 f_z 分别表示 x, y, z 轴加速度计的理想比力测量值。

根据同一向量在不同坐标系下的坐标变换,有

$$\mathbf{g}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{b}} = \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \mathbf{g}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{b} = \mathbf{C}_{n}^{b} \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \tag{5.35}$$

式中, C_n^b 为 n 系到 b 系的向量坐标变换矩阵,也称姿态矩阵(详见第6章姿态算法), 解析粗对准的主要目标是求解该 3×3 矩阵的元素。由于载体姿态具有 3 个自由度,因 此 C_n^b 矩阵中真正独立的待求元素也只有 3 个,其他 6 个自由度都因姿态矩阵要满足 单位正交矩阵的条件而失去了。

式(5.34)和式(5.35)共同构成了 6 个方程,一般情况下可以直接求得 3 个待定的姿态角。为了更方便地应用矩阵方法进行求解,通常会构造一个与 g_p 和 ω_{ie} 均垂直的辅助向量 v

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}_{\mathrm{p}} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \tag{5.36}$$

式中,运算符"×"表示两个向量的叉乘,即向量积。在式(5.36)中,等号两边的向量分别投影至 n 系和 b 系,有

$$\mathbf{v}^{n} = \mathbf{g}_{p}^{n} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}$$

$$\mathbf{v}^{b} = \mathbf{g}_{p}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{b} = \mathbf{C}_{n}^{b} \left(\mathbf{g}_{p}^{n} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \right)$$

(5.37)

将式(5.34)、式(5.35)和式(5.37)写成分块矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{p}^{b} & \boldsymbol{\omega}_{ie}^{b} & \mathbf{v}^{b} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{n}^{b} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{p}^{n} & \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} & \mathbf{v}^{n} \end{bmatrix}$$
(5.38)

对上式等号两边的矩阵转置,有

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}_{p}^{b})^{\mathsf{T}} \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{b})^{\mathsf{T}} \\ (\mathbf{v}^{b})^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}_{p}^{n})^{\mathsf{T}} \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n})^{\mathsf{T}} \\ (\mathbf{v}^{n})^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{b}^{n}$$
(5.39)

注意,上述转置运算过程中应用了姿态矩阵是正交矩阵这一特性,即对于姿态矩阵 $\mathbf{C}_{b}^{n} \neq \mathbf{C}_{b}^{n} = (\mathbf{C}_{n}^{b})^{\top} = (\mathbf{C}_{n}^{b})^{-1}$,详见第6章6.2.2.1小节。根据上式,可求解姿态矩阵

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}})^{\top} \\ (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}})^{\top} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{n}})^{\top} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{g}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{b}})^{\top} \\ (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{b}})^{\top} \\ (\mathbf{v}^{\mathrm{b}})^{\top} \end{bmatrix}$$
(5.40)

当向量 \mathbf{g}_p^n 和 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 不共线时,上式中的逆矩阵存在,因此待求的姿态矩阵 \mathbf{C}_b^n 可以 唯一确定。然而,在地球的两极地区 \mathbf{g}_p^n 和 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 共线,此时解析粗对准方法失效。一般 情况下,上式中的逆矩阵可以直接求得其解析表达式:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{g}_{p}^{n})^{\top} \\ (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n})^{\top} \\ (\mathbf{v}^{n})^{\top} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \\ \omega_{e} \cos \varphi & 0 & -\omega_{e} \sin \varphi \\ 0 & g \omega_{e} \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\tan \varphi}{g} & \frac{1}{\omega_{e} \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g \omega_{e} \cos \varphi} \\ \frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(5.41)

式(5.40)中的 \mathbf{g}_{p}^{b} 和 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{b}$ 分别由三轴加速度计和三轴陀螺测量得到,将式(5.31)、式(5.33)和 式(5.41)代入(5.40),可得

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \frac{\tan\varphi}{\mathrm{g}} & \frac{1}{\omega_{\mathrm{e}}\cos\varphi} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{g}\omega_{\mathrm{e}}\cos\varphi} \\ \frac{1}{\mathrm{g}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\mathbf{f}^{\mathrm{b}})^{\top} \\ (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}})^{\top} \\ (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}} \times \mathbf{f}^{\mathrm{b}})^{\top} \end{bmatrix}$$
(5.42)

上式即为高精度惯导解析粗对准的基本原理。在已知当地纬度和重力加速度大小的情况下,通过上式即可求解惯导的初始姿态。然而,在实际应用中,还需要考虑数值 计算稳定性和矩阵正交化处理的问题,这些内容将在下一小节中详细讨论。

5.3.1.1 解析粗对准数值特性分析

在解析粗对准过程中,由于加速度计和陀螺仪的输出受到惯性传感器误差的影响, 直接将它们代入式(5.42)求解初始姿态矩阵时需注意两点。首先,为减少传感器随机噪声 的影响,应对一段时间内的比力和角速度观测值取平均后再代入计算(如本章5.2.4.2小 节所述)。其次,受加速度计和陀螺仪误差的影响,计算得到的姿态矩阵可能不满足正 交矩阵的特性。为此可以对求解得到的姿态矩阵进行正交化处理。而更常用的方法是预 先对参与解算的所有向量进行正交化和归一化处理。

定义向量

$$\mathbf{v}_{g}^{n} = \frac{\mathbf{g}_{p}^{n}}{|\mathbf{g}_{p}^{n}|}, \quad \mathbf{v}_{\omega}^{n} = \frac{\mathbf{g}_{p}^{n} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}}{|\mathbf{g}_{p}^{n} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}|}, \quad \mathbf{v}_{g\omega}^{n} = \frac{\mathbf{g}_{p}^{n} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times \mathbf{g}_{p}^{n}}{|\mathbf{g}_{p}^{n} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times \mathbf{g}_{p}^{n}|}$$
(5.43)

对应的 b 系下的比力和角速度观测向量为

$$\begin{split} \tilde{\mathbf{v}}_{g}^{b} &= \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b}}{\left|\tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b}\right|} = \frac{-\tilde{\mathbf{f}}^{b}}{\left|\tilde{\mathbf{f}}^{b}\right|} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{\omega}^{b} &= \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{b}}{\left|\tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{b}\right|} = \frac{-\tilde{\mathbf{f}}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}}{\left|\tilde{\mathbf{f}}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}\right|} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{g\omega}^{b} &= \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{b} \times \tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b}}{\left|\tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{b} \times \tilde{\mathbf{g}}_{p}^{b}\right|} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b} \times \tilde{\mathbf{f}}^{b}}{\left|\tilde{\mathbf{f}}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b} \times \tilde{\mathbf{f}}^{b}\right|} \end{split}$$
(5.44)

式中, 上标""表示对应向量的实际观测值(含误差)。

根据式(5.43)和式(5.44), 已知 \mathbf{v}_g 、 \mathbf{v}_ω 和 $\mathbf{v}_{g\omega}$ 在 n 系和 b 系下的投影,则姿态矩阵 可求解如下:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{v}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{v}_{\omega}^{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{v}_{\mathrm{g}\omega}^{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\tilde{\mathbf{v}}_{\omega}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{g}\omega}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{n}} & \mathbf{v}_{\omega}^{\mathrm{n}} & \mathbf{v}_{\mathrm{g}\omega}^{\mathrm{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\tilde{\mathbf{v}}_{\omega}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{g}\omega}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$
(5.45)

容易验证上式等号右边的两个矩阵均为单位正交矩阵,则 Ĉⁿ 必然也是单位正交矩阵。该式是解析粗对准中较为实用的算法。

接下来,讨论粗对准数值特性的另一个问题。许多初学者可能会提出这样的疑问: 与式(5.38)类似,能否将三个向量的坐标转换关系表示为如下分块矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{p}^{n} & \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} & \mathbf{v}^{n} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{b}^{n} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{p}^{b} & \boldsymbol{\omega}_{ie}^{b} & \mathbf{v}^{b} \end{bmatrix}$$
(5.46)

姿态矩阵可求解如下:

$$\mathbf{C}_{b}^{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{p}^{n} & \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} & \mathbf{v}^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{p}^{b} & \boldsymbol{\omega}_{ie}^{b} & \mathbf{v}^{b} \end{bmatrix}^{-1}$$
(5.47)

理论上,式(5.47)和(5.40)是等价的。然而,通常不使用(5.47)计算初始姿态矩阵,因为其数值特性不如式(5.40)稳定。式(5.47)求逆的矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{p}^{b} & \boldsymbol{\omega}_{ie}^{b} & \mathbf{v}^{b} \end{bmatrix}^{-1}$ 由陀螺和加速度 计的实际观测值组成,包含传感器误差,可能导致逆矩阵数值特性不佳,甚至出现无法 求逆的情况。相比之下,式(5.40)的求逆矩阵元素都是理论值,不含测量误差,只要不 在地球的南北两极附近,总是可逆的,并且其数值特性相对更好。

5.3.1.2 解析粗对准直观分析

在5.2节中,首先通过加速度计调平确定了横滚和俯仰两个水平姿态角,然后通过 陀螺寻北计算姿态的第三个参数,即航向角。解析粗对准算法本质上是将上述两个过程 的三个参数进行统一求解。接下来详细解释二者的等价性。

式(5.34)可展开为

$$\begin{bmatrix} -f_{x} \\ -f_{y} \\ -f_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$
(5.48)

式中, c_{11} , c_{12} , …, c_{33} 是方向余弦矩阵 C_n^b 的元素。根据式(5.48)可求得矩阵 C_n^b 第 3 列 的所有元素:

$$c_{13} = \frac{-f_x}{g}, \quad c_{23} = \frac{-f_y}{g}, \quad c_{33} = \frac{-f_z}{g}$$
 (5.49)

同理,式(5.35)可展开为

$$\begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{ib},\mathrm{x}} \\ \omega_{\mathrm{ib},\mathrm{y}} \\ \omega_{\mathrm{ib},\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{e}} \cos\varphi \\ 0 \\ -\omega_{\mathrm{e}} \sin\varphi \end{bmatrix}$$
(5.50)

根据式(5.49)和式(5.50),可求得矩阵 C_n^b 第 1 列的所有元素:

$$\begin{cases} c_{11} = \frac{\omega_{ib,x}}{\omega_e \cos \varphi} - \frac{f_x}{g} \tan \varphi \\ c_{21} = \frac{\omega_{ib,y}}{\omega_e \cos \varphi} - \frac{f_y}{g} \tan \varphi \\ c_{31} = \frac{\omega_{ib,z}}{\omega_e \cos \varphi} - \frac{f_z}{g} \tan \varphi \end{cases}$$
(5.51)

姿态矩阵 C_n^b 的其余元素可以根据矩阵的正交特性来确定[17, p.193]。显然,只要 $\varphi \neq \pm 90^\circ$,初始姿态矩阵可由式(5.34)和式(5.35)唯一地确定,式(5.36)并未提供额外的 信息。

根据姿态角转方向余弦公式(详见附录, A式(A.1)),有

 $\mathbf{C}_{n}^{b} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$ (5.52)

式中, c = cos(), s = sin()。上式代入式(5.48),得

$$\begin{bmatrix} -f_{x} \\ -f_{y} \\ -f_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g\sin\theta \\ g\sin\phi\cos\theta \\ g\cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$
(5.53)

即

$$f_{x} = g \sin \theta$$

$$f_{y} = -g \sin \phi \cos \theta$$
(5.54)

上式即加速度计调平的基本原理,在本章5.2.3小节中对它做了一定的简化。观察 式(5.53),虽然可以列出3个方程,且待求的未知数也是3(3个姿态角),但无法从这 些方程中同时解出航向角。原因是上述方程组与航向角无关。从方程求解的角度来看, 这3个方程并非相互独立。 同理,将式(5.52)代入式(5.50),可得三轴陀螺测量的角速度值,即地球自转角速度 向量在三轴陀螺方向上的投影。

$$\begin{bmatrix} \omega_{\rm ib,x} \\ \omega_{\rm ib,y} \\ \omega_{\rm ib,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\rm e} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi + \omega_{\rm e} \sin \varphi \sin \theta \\ \omega_{\rm e} \cos \varphi \left(-\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi \right) - \omega_{\rm e} \sin \varphi \sin \phi \cos \theta \\ \omega_{\rm e} \cos \varphi \left(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \right) - \omega_{\rm e} \sin \varphi \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$
(5.55)

以稳定平台或平台式惯性导航系统为例,在定义了当地水平面并完成了对准过程 中的调平之后,水平姿态角为零。因此,上式可以简化为

$$\begin{bmatrix} \omega_{\rm ib,x} \\ \omega_{\rm ib,y} \\ \omega_{\rm ib,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\rm e} \cos \varphi \cos \psi \\ -\omega_{\rm e} \cos \varphi \sin \psi \\ -\omega_{\rm e} \sin \varphi \end{bmatrix}$$
(5.56)

上式即本章5.2.4.1小节陀螺静态寻北所用的观测方程。

5.3.2 解析粗对准误差分析

解析粗对准的姿态精度在很大程度上取决于传感器的测量精度和基座的静止状态。 本章5.2节直观地分析了加速度计调平和陀螺仪寻北过程对应的姿态角误差。接下来,直 接对解析粗对准的方程进行误差分析,推导出粗对准姿态误差的解析表达式。

根据姿态误差的定义(详见第7章7.2.1小节), \hat{C}_{b}^{n} 表示为姿态误差矩阵 E 与真实姿态矩阵的乘积,即

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} = \mathbf{E}\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \tag{5.57}$$

式中,**E**代表初始对准计算的导航坐标系与真实导航坐标系之间的失准程度,即角度差异。当姿态角误差为小角度(一般小于 6°)时,**E**可表示为(详见第7章7.2.1小节)

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times) \tag{5.58}$$

式中, I 是 3×3 的单位矩阵, ($\phi \times$) 为反对称矩阵

$$(\phi \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{\rm D} & \phi_{\rm E} \\ \phi_{\rm D} & 0 & -\phi_{\rm N} \\ -\phi_{\rm E} & \phi_{\rm N} & 0 \end{bmatrix}$$
(5.59)

式中, ϕ_N 、 ϕ_E 和 ϕ_D 分别是关于当地水平坐标系北向、东向和垂向的失准角,等效于 平台式惯导系统仪表组的物理失准。 ϕ_N 和 ϕ_E 也即前面所称的水平姿态角误差, ϕ_D 则 为航向角或方位误差。 通过误差扰动分析的方法(详见第7章7.2节),代入惯性传感器误差,可得粗对准 姿态失准角与惯性传感器误差的函数关系,详细推导可参考文献[12, p.243] [35, p.155]。

$$\phi_{\rm N} = \frac{\delta f_{\rm E}}{g}$$

$$\phi_{\rm E} = \frac{-\delta f_{\rm N}}{g}$$

$$\phi_{\rm D} = \frac{\delta \omega_{\rm ib,E}}{\omega_{\rm e} \cos \varphi} + \frac{\delta f_{\rm E}}{g} \tan \varphi$$
(5.60)

式中, δf_N 和 δf_E 分别为加速度计等效的北向和东向测量误差, $\delta \omega_{ib,E}$ 为等效东向陀螺 测量误差。可见水平姿态角的对准误差主要取决于水平方向加速度计的测量误差。对于 具备静态自寻北能力的惯导来说, 一般有

$$\frac{\delta f_{\rm E}}{g} \tan \varphi \ll \frac{\delta \omega_{\rm ib,E}}{\omega_{\rm e} \cos \varphi} \tag{5.61}$$

因此, 航向对准误差与传感器误差的关系近似为

$$\phi_{\rm D} = \frac{\delta\omega_{\rm ib,E}}{\omega_{\rm e}\cos\varphi} \tag{5.62}$$

可见航向对准误差主要取决于等效东向陀螺误差。显然,式(5.60)和式(5.62)即本章5.2节中直观推导的加速度计调平过程水平姿态角误差和陀螺寻北过程的航向角误差公式。

最后需要指出的是,上述解析粗对准算法体现了姿态估计的双矢量定姿原理。当需 要确定两个坐标系之间的角度关系(即姿态)时,需要找出两个相互不平行的矢量,如 果已知这两个矢量在两个坐标系中投影分量,则可使用本节的解析粗对准算法解算姿态。

5.4 其他初始对准方法

当载体对地静止时,即便是低精度的 INS 也可通过自对准实现横滚角和俯仰角的 初始化。如果方位角精确初始化也需采用自对准实现,陀螺零偏通常应小于 1°/h。粗 对准或陀螺寻北的主要挑战是线运动或角运动干扰。例如,对准过程中,载体可能受到 阵风或人员活动(如给飞机加注燃油、装载货物等)的干扰。若存在外部角运动干扰, 即使对陀螺测量值进行时间平均也难以完全消除其影响。更有效的方法是采用具有更 好的角晃动抗干扰能力的间接陀螺寻北方法。该方法通过陀螺测量值计算载体角运动 引起的姿态变化,并利用该姿态变化量将比力测量值转换到惯性坐标系。在惯性坐标系 下,重力向量绕地轴旋转,重力向量的方向指向地心,其变化率(时间导数)指向东西 方向。因此,重力向量及其变化率包含了水平和方位信息。理论上,只要获得两个时刻 的重力及对应比力测量值,即可求解出初始姿态。

对于动态对准过程, INS 的初始姿态信息可由其他姿态测量系统直接提供, 这些 系统包括更高精度的惯导系统、双天线或多天线 GNSS 系统等。针对机载武器系统的 INS,一种有效的对准策略是将飞机主导航系统的高精度 INS 所提供的位置、速度和姿态信息直接传递至武器系统的 INS,此操作称为传递对准。双天线 GNSS 系统通过在载体上部署两个 GNSS 天线,并计算它们在地理坐标系中的相对位置,构成一根基线向量。一般情况下,GNSS 双天线只能提供两个姿态角,例如两个天线沿着车辆或飞机的纵轴方向安装,则仅能提供航向和俯仰角信息。多天线 GNSS 系统则能够测量载体的全部姿态信息。双天线或多天线 GNSS 系统提供的姿态测量值通常含有较大的噪声,可通过延长基线长度或进行长时间测量的平均处理来提升精度。需注意的是,不管是传递对准或双/多天线 GNSS 实现姿态初始化过程,都必须考虑 IMU 与这些姿态测量系统之间的安装角度偏差,即 IMU 的轴线与姿态测量系统的坐标系轴线不对齐的情况。

在动态对准过程中,惯性导航系统(INS)的初始姿态信息可以通过外部传感器提供的速度、位移或绝对位置信息直接或间接获取。对于大多数陆地车辆搭载的 INS,利用 GNSS 提供的瞬时三维速度观测,可以确定载体的航向角和俯仰角。在车辆走直线的情况下,可以假设车辆的行进方向即为载体前向 x 轴方向,通过 GNSS 测量的运动轨迹,计算航迹角和坡度角,从而对车载 INS 的航向和俯仰角进行初始化。然而,当车辆转弯时,此方法的误差较大。更严谨的方法是让车辆行驶一段距离(该过程可包括转弯或改变航向),在短时间内,INS 推算的轨迹与实际轨迹在形状上相似但存在相对旋转,该旋转由待估计的初始航向角引起[12]。通过比较 INS 轨迹与真实轨迹,可以求解出初始航向角。其中 INS 轨迹可以通过 INS 的机械编排算法计算得到,或者由 INS 与里程计组成的航迹推算系统得出,真实轨迹可由 GNSS 或其他定位手段得到。需要注意的是,此方法要求车辆的轨迹与航向角保持一致,即车辆在运动过程中不应发生横向位移。另外,在 GNSS 能够提供连续定位结果的场景中,也可以通过融合 INS 和 GNSS 的位置数据来估计 INS 的初始航向。

第6章 惯性导航算法

6.1 引言

惯性导航解算是根据加速度计的比力测量值和陀螺的角速度测量值自主推算载体 位置、速度和姿态的过程,称作惯导机械编排 (INS mechanization)。图6.1是 n 系下的 INS 机械编排流程图,由两条主线构成:一是速度和位置积分运算,从加速度计的比力 测量值到位置输出,贯穿了整个机械编排过程;二是姿态积分运算,即陀螺的角速度测 量值积分为载体姿态。惯性导航算法设计围绕着这两条主线展开,并实现时间上的离散 化,得到位置、速度和姿态的递推计算式。



图 6.1 导航系 (n 系) 下的惯性导航机械编排流程图

在速度和位置积分运算中,比力测量值经两次积分(对应第一条主线上的两个积分号)后得到位置变化量。在此过程中,需要先对比力向量进行坐标变换,从加速度计测量所在的载体系(b系)变换到选定的导航参考坐标系(n系),该运算需要姿态积分环节提供坐标变换矩阵 C^h_b(一种姿态参数,详见本章6.2.2小节)。由于比力 fⁿ 是载体相对于惯性坐标系的非引力加速度(见第3章3.2节),并非导航所需的相对地面的运动加速度。为此,需要在 fⁿ 中补偿重力加速度和哥氏加速度,其中重力是地球引力和地球自转离心力的合力(见第2章2.3.4小节),哥氏加速度由虚拟的"哥氏力"导致,是由于导航选定的参考系相对 i 系旋转¹造成的。这些待补偿的加速度称作速度积分中的"有害加速度",其物理含义将在6.3.2.3节详细解释。由 n 系下的速度到位置变化量则是直接积分得到,比较简单。

 $^{^{1}}e$ 系和 n 系相对 i 系 (加速度计的测量参照系) 有旋转, 且 n 系相对 e 系也有旋转。

姿态积分运算与速度、位置积分有着显著差异。姿态对惯导初学者来说相对陌生, 它与位置和速度的运算不同,不能用三维向量这一熟悉的数学工具来表达和计算。为此, 要考虑用什么数学工具来表达和计算姿态(即姿态的参数化,attitude parameterization)。 常用的姿态参数有欧拉角、方向余弦矩阵、姿态四元数和等效旋转矢量²。首先,需要 理解为什么这些数学工具能够表示姿态,以及如何表达,这是惯导算法初学者的"拦路 虎"之一。然后,需要建立姿态表达式与陀螺角速度测量值之间的函数关系,即推导姿 态表达式的微分方程。此外,导航关心的姿态是 b 系与 n 系之间的角度关系,陀螺并 不能直接测量载体相对于 n 系的角速度 ω_{nb} ,只能测量载体相对于 i 系的角速度 ω_{ib} 。 为此,需要从陀螺的角速度测量值中补偿地球自转角速度 ω_{ie} 和位移角速度 ω_{en} ,前者 是由于地球在惯性空间中转动导致的(见第2章2.3.1.3小节),后者是由于 n 系跟随载体 在地球表面这一曲面上运动从而相对于 e 系转动造成的(见第2章2.2.3小节)。上述角速 度补偿项之所以出现,也是因为导航选择了一个相对于 i 系有角运动(转动)的坐标系 为参考。

惯导机械编排的 3 个积分运算本质上都是对时变的三维向量进行积分。对三维向量的求导(速度微分方程的推导)和积分(速度和姿态更新)都须注意时变向量不仅有模长的变化还有方向的变化(见第2章2.1.4小节)。其中,比力和角速度向量模长的变化能够很好地被加速度计和陀螺测量出来(尤其是采用了 IMU 增量输出形式,见第3章3.4节),然而它们方向的变化在离散化采样过程中是有损失的,无法完整地保留相关信息。在惯导算法的实现过程中,上述积分都要做时间离散化处理得到递推的差分方程形式(图6.1中没有体现该离散化过程)。积分离散化过程中对向量方向的变化应做尽可能精确的补偿,这将导致惯导姿态算法中出现圆锥效应补偿项(coning term),以及速度算法中的旋转效应补偿项(rotation term)和划桨效应补偿项(sculling term),这些概念抽象晦涩,推导过程复杂,是惯导算法学习中的另一个"拦路虎"。

在惯导机械编排中,姿态求解是惯导算法中最底层的积分运算,其误差影响最为深 远和显著。可以说机械编排的重点在于姿态解算,甚至整个捷联惯导算法的发展历史也 是围绕着姿态的精确求解而展开的。

本章内容将围绕图6.1展开。首先,介绍四种姿态表达式及其微分方程,通过求解微 分方程实现姿态的递推计算。然后,推导速度微分方程,其中涉及对时变向量在不同坐 标系下的求导,求解速度微分方程的过程又涉及时变向量的积分运算,这是惯导算法的 另一难点。最后是位置算法,相比之下,位置微分方程的推导和求解都比较简单³。

²欧拉角、方向余弦矩阵和四元数都能用于表示绝对姿态和姿态的变化量,而等效旋转矢量一般只用 于表示姿态的变化量。

³面向极高精度的惯导做精细的位置积分时也会出现跟速度和姿态类似的误差补偿项,本书参考文献[19]称之为涡卷效应补偿项(scrolling term)。该补偿项的幅度一般比较小,对于中高精度惯导都可以忽略,本书不做讨论。

6.2 姿态算法

第3章3.5.2小节中对比了平台式惯导和捷联式惯导的区别。平台式惯导将三轴加速 度计安装在陀螺控制的空间稳定平台上,并始终与选定参考坐标系的轴线对齐,导航解 算只需对加速度计的测量值按时间积分即可得到载体的速度和位置。捷联惯导由于惯 性器件与载体固连,需要时刻计算出载体相对于参考坐标系的相对角度关系(即姿态), 从而将加速度计的比力向量投影变换到参考坐标系下再做积分运算,得到载体的速度 和位置。惯导姿态的重要作用体现在以下两个方面:一方面是作为基础的导航参数对外 输出;另一方面用于比力向量及其他三维向量的投影变换。

姿态 (attitude) 是载体的物理轴在空间中的朝向或指向 (orientation)。姿态是相 对量,需要指定一个参考坐标系 (记作 R 系⁴) 才能准确描述。**对于捷联惯导,由于惯 性传感器与载体固连,所以载体的姿态可以表达为 IMU 所在的** b **系相对于** R **系的朝 向或角度关系**。对于地球附近的惯性导航应用,本书默认以 n 系为姿态参考坐标系,且 不严格区分 b 系与 v 系 (详见第2章2.2.5小节)。姿态该如何表达呢?我们描述一架飞 机在空中的姿态时通常会说 "飞机机头北偏东 30°,机头抬升 5°,机翼水平"。这是用 自然语言描述姿态,比较繁琐且无法做计算。因此,需要一种数学语言来严谨地描述姿 态,称为**姿态参数** (attitude parameter) **或姿态表达式**。

当载体作角运动时,其姿态随时间变化,那么如何描述姿态的变化规律呢?在实际应用中,又怎样实现载体姿态的递推计算?为此,姿态表达式还需一套对应的数学运算法则,来支持姿态的计算和更新。本节在给出每一种姿态表达式的定义后,随即介绍其运算法则,然后推导它的微分方程以建立载体姿态与陀螺输出角速度的函数关系,最后通过求解该微分方程并作离散化得到姿态的递推公式。在求解微分方程时须严格控制离散化带来的计算误差,以保证姿态的解算精度。

本节将先后介绍欧拉角、方向余弦矩阵、姿态四元数和等效旋转矢量四种姿态表达 式,它们之间的相互转换公式见附录A.1。为何要学习四种不同姿态参数呢?因为它们 各有优缺点,需要在实际导航应用中灵活选用,取长补短。例如,用欧拉角描述载体的 空间轴向非常直观,但它却无法用于全姿态导航解算,并且做向量的投影变换时,须转 换成对应的方向余弦矩阵或四元数;方向余弦矩阵用于向量投影变换非常方便,但是通 过求解方向余弦矩阵或四元数的微分方程来实现姿态解算时都会不可避免地遇到"不 可交换误差"的困扰,而这个问题可以借助等效旋转矢量从理论上得到近乎完美的解 决。本节末尾给出了一个综合使用多种姿态表达式的姿态更新算法示例,帮助读者从繁 重的公式推导中抽身出来,形成姿态算法的全局总览。

6.2.1 欧拉角

著名数学家欧拉(Leonhard Euler)证明:任意两个笛卡尔直角坐标系之间的相对 朝向关系可以通过三个角度来描述,对应依次进行的三次单轴旋转,称作一组欧拉角

⁴取 reference (参考)的首字母,且为了跟位置向量 \mathbf{r} 区分,采用大写字母 R。

(Euler angles),因最早由欧拉提出而得名。欧拉角的含义形象直观,易于理解,尤其是用于描述载体相对于导航坐标系的角运动非常方便。

6.2.1.1 欧拉角组

载体坐标系 b 相对于参考系 R 的欧拉角组⁵定义为:对 R 系施以三次依次转动后 与 b 系对齐,或将 b 系看作动坐标系⁶,其开始时与 R 系对齐,经过三次转动后到达最 终的空间朝向。三次依次转动如图6.2 所示:

- (1) 坐标系 R (ox^Ry^Rz^R), 绕其 z 轴正方向转动角度 ψ , 到达第一过渡坐标系 ox^{ψ}y^{ψ}z^{ψ}, R 与第一过渡坐标系具有共同的 z 轴, 即 z^R = z^{ψ}。
- 第一过渡坐标系 ox^ψy^ψz^ψ 绕其 y^ψ 轴正方向转动角度 θ, 到达第二过渡坐标 系 ox^θy^θz^θ, 两个过渡坐标系具有共同的 y 轴, 即 y^θ = y^ψ。本次转动的坐标 轴 y^ψ 与第一次转动的旋转轴 z^ψ 垂直。
- (3) 第二过渡坐标系 $ox^{\theta}y^{\theta}z^{\theta}$ 绕其 x^{θ} 轴正方向转动角度 ϕ , 最终到达坐标系 b $(ox^{b}y^{b}z^{b})$ 。本次转动的坐标轴 x^{θ} 与第二次转动的旋转轴 y^{θ} 垂直。



图 6.2 ZYX 形式的欧拉角

上述描述比较繁琐,在约定 R 系和 b 系的定义及单轴旋转规则后,上述有用的信息可凝练为以下简洁的数学语言:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{Rb}} = \begin{vmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{vmatrix} \tag{6.1}$$

式中, \mathcal{E} 表示一组欧拉角, 下标 R 和 b 分别表示参考系和载体系, ψ 、 θ 和 ϕ 为三个转角, 按转动顺序的倒序从上到下书写。

图6.2的转轴顺序记为 "ZYX", 表示依次绕初始坐标系 z 轴, 第一过渡坐标系 y 轴和第二过渡坐标系的 x 轴旋转, 一些文献中也记作 "321", 即用 1, 2 和 3 分别表示 x、

⁵欧拉角组即一组欧拉角的意思,后续为描述方便,将简写为欧拉角。

⁶注意:这里并不是描述 b 系随时间的变化,而是将某一固定时刻 b 系与 R 系之间的相对朝向关系分 解为三次转动的叠加。

y和z轴的转动。在给定一组欧拉角表示两个坐标系间的姿态关系时,一定要同时指定 对应的转轴顺序才有意义。因为两个坐标系的相对姿态可通过多组不同的等价转动来 描述,这涉及转轴和转轴顺序的选择。针对两个右手直角坐标系,第一次转动,可以绕 三个轴中的任一轴转动,故有3种选择,第二次转动,则可以绕其它两个轴中的任一轴 转动,有2种选择,第三次转动,又可以绕另外两轴的任一个转动(只要相邻两次转动 的旋转轴不同即可),有2种选择。因此,可等价的欧拉角组共有3×2×2=12组[36], 其转轴顺序排列组合包括:

XYZ	YZX	ZXY
XZY	YXZ	ZYX
XYX	YZY	ZXZ
XZX	YXY	ZYZ

除非特别说明,本书默认使用"ZYX(321)"形式的欧拉角,后续在不引起歧义的 情况下将不明确写出其转轴顺序。读者可使用 MATLAB 软件⁷自带函数练习欧拉角与 其它姿态表达式的转换,来加深对欧拉角转轴顺序重要性的理解。例如 MATLAB 自带 函数 angle2dcm 可根据欧拉角计算方向余弦矩阵(详见6.2.2节),使用语法为"dcm = angle2dcm(yaw, pitch, roll, 'ZYX')",在输入欧拉角的同时必须指定对应的转轴顺序, 如下所示:

1 yaw = 0.7854; pitch = 0.1; roll = 0; % 给定三个欧拉角,单位rad
2 dcm1 = angle2dcm(yaw, pitch, roll, 'ZYX'); % 按ZYX(321)形式定义的欧拉角
3 dcm2 = angle2dcm(yaw, pitch, roll, 'ZYZ'); % 按ZYZ(323)形式定义的欧拉角
4 % 比较 dcm1 与 dcm2 的差异

6.2.1.2 导航姿态角的定义

由于 b 系相对 R 系的欧拉角有 12 种等价选择。为使用方便, 航空导航领域约定⁸了 一套欧拉角来描述 b 系(载体)相对于 n 系(参考坐标系)的姿态,称作导航姿态角:

- 航向角:载体纵轴正方向在当地水平面上的投影与 n 系北向的夹角,取北偏东 为正(即沿载体立轴正方向旋转),一般用 ψ 表示,角度范围为 0 ~ 360° 或 -180° ~ +180°。
- 俯仰角:载体纵轴正方向与其水平投影线之间的夹角,当载体"抬头"时定义为
 正(即沿当前载体横轴正方向旋转),一般用 θ表示,取值范围为 -90°~90°。
- 横滚角:载体立轴正方向与载体纵轴所在铅垂面之间的夹角,当载体向右倾斜 (如飞机右机翼下压)时为正(即沿当前载体纵轴正方向旋转),用φ表示,取 值范围为-180°~+180°。

⁷注意, 需安装 MATLAB 2018 及以上的版本, 并安装 Aerospace Toolbox。

⁸这套定义只是使用相对比较广泛,但并非行业共识。

从上述定义可以看出,导航姿态角与载体的物理轴向紧密关联,而与 b 系的具体 轴线选择没有关系。载体坐标系在物理上具有明确的含义,是绝大多数运动和控制的参 考基准,详见第2章2.2.4小节。例如,对于地面车辆,一旦明确了车辆的纵轴、横轴和立 轴就可以描述其姿态了;而在导航解算中,可以灵活选用"右-前-上"或者"前-右-下" 等不同形式的 b 系。无论选择何种 b 系的数学定义,车体姿态都是按照上面的姿态角 约定方式定义的,与 b 系的选择无关。

可以证明,导航姿态角本质上就是针对"北-东-地"n 系与"前-右-下"b 系按照 "ZYX"转轴顺序得到的欧拉角组,即n 系先后绕 z 轴旋转 ψ 、绕过渡 y 轴转动 θ 、再 绕过渡 x 轴转动 ϕ 后与 b 系对齐。这样的坐标系定义正好与本书(见第2章2.2节)一 致。在一些文献中,"姿态"特指横滚角和俯仰角这两个水平姿态角,因此它们称欧拉 角组为姿态和航向。本书"姿态"则默认包含了横滚、俯仰和航向 3 个参数。

6.2.1.3 用欧拉角表示姿态矩阵

欧拉角不能直接操作三维向量的投影变换,必须先转换为相应的坐标变换矩阵,又称方向余弦矩阵(详见本章6.2.2节)。接下来推导从欧拉角到坐标变换矩阵的转换公式。 任意三维向量 v 在 n 系和 b 系的坐标分别记作

$$\mathbf{v}^{\mathrm{n}} = \left[egin{array}{c} \mathrm{x}^{\mathrm{n}} \ \mathrm{y}^{\mathrm{n}} \ \mathrm{z}^{\mathrm{n}} \end{array}
ight], \ \ \mathbf{v}^{\mathrm{b}} = \left[egin{array}{c} \mathrm{x}^{\mathrm{b}} \ \mathrm{y}^{\mathrm{b}} \ \mathrm{z}^{\mathrm{b}} \end{array}
ight]$$

在初始时刻,假定坐标系 b_0 与 n 系重合,第一次转动让 b_0 绕其 z 轴 (即 n 系的 z 轴)转动 ψ 角。此时 b_0 转到 b' 的位置,向量 v 在 b' 与 n 系之间的投影变换关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{b}'} \\ \mathbf{y}^{\mathbf{b}'} \\ \mathbf{z}^{\mathbf{b}'} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\psi} \triangleq \mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{b}'}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} \\ \mathbf{y}^{\mathbf{n}} \\ \mathbf{z}^{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$$
(6.2)

第二次转动, b' 系绕其 y 轴转动 θ 角。此时 b' 转到 b" 的位置, 向量 v 在 b' 与 b" 系之间的投影变换关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{b}''} \\ \mathbf{y}^{\mathbf{b}''} \\ \mathbf{z}^{\mathbf{b}''} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\theta} \triangleq \mathbf{C}_{\mathbf{b}'}^{\mathbf{b}''}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{b}'} \\ \mathbf{y}^{\mathbf{b}'} \\ \mathbf{z}^{\mathbf{b}'} \end{bmatrix}$$
(6.3)

第三次转动, b" 系绕其 x 轴转动 ϕ 角。此时 b" 转到 b 的位置, 向量 v 在 b" 与 b

系之间的投影变换关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \\ \mathbf{y}^{\mathbf{b}} \\ \mathbf{z}^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\phi} \triangleq \mathbf{C}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{b}^{\prime\prime}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathbf{b}^{\prime\prime}} \\ \mathbf{y}^{\mathbf{b}^{\prime\prime}} \\ \mathbf{z}^{\mathbf{b}^{\prime\prime}} \end{bmatrix}$$
(6.4)

将式(6.2)代入式(6.3),再代入式(6.4),可得向量 v 从 n 系到 b 系的投影变换关系:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{b}} = \mathbf{C}_{\phi} \mathbf{C}_{\theta} \mathbf{C}_{\psi} \mathbf{v}^{\mathrm{n}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}''}^{\mathrm{b}} \mathbf{C}_{\mathrm{b}'}^{\mathrm{b}''} \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}'} \mathbf{v}^{\mathrm{n}}$$
(6.5)

因此,从n系到b系的向量投影变换矩阵与欧拉角的转换关系为

$$\mathbf{C}_{n}^{b}(\underbrace{\psi \to \theta \to \phi}_{z \to y \to x}) = \mathbf{C}_{\phi}\mathbf{C}_{\theta}\mathbf{C}_{\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$
(6.6)

式中, c = cos (), s = sin ()。上式明确写出了 \mathbf{C}_{n}^{b} 对应的欧拉角和转轴顺序 $\psi \to \theta \to \phi$, 后面为了书写简洁,在不引起歧义的情况下,将其简写为 \mathbf{C}_{n}^{b} 。

式(6.6)中的 n 和 b 可替换成任意其它直角坐标系,只要是按照"ZYX"顺序定义的欧拉角组 $\psi \to \theta \to \phi$ 都可以套用上述公式⁹,此时矩阵的上下标也须对应修改。参考上述推导过程,很容易得到向量从 b 系到 n 系的投影变换矩阵:

$$\mathbf{C}_{b}^{n} = \begin{vmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{vmatrix}$$
(6.7)

可见,矩阵 **C**^b_b 与 **C**^b_n 互为转置关系,也互为逆矩阵,对于向量的投影变换来说则 互为逆变换,这一性质将在本章6.2.2.2小节讨论。

6.2.1.4 小角度欧拉角对应的姿态矩阵

当 3 个欧拉角都是小角度时,其三角函数取一阶近似: $sin(x) \approx x$, $cos(x) \approx 1$, x 表示角度(以弧度为单位)。代入式(6.7),并忽略二阶小量¹⁰近似为

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{3} + (\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{nb}} \times)$$
(6.8)

⁹当然,不是这么定义的欧拉角则不能套用,应该重新推导对应的转换公式。

¹⁰此时,两个小角度正弦值的乘积为二阶小。

式中, ($\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nb}$ ×) 为欧拉角组 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nb}$ 对应的反对称矩阵, 定义见式(2.16)。类似地, 式(6.6)近 似为

$$\mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{nb}} \times)$$
(6.9)

当取极限 $\psi \to 0$ 、 $\theta \to 0$ 和 $\phi \to 0$ 时,式(6.8)和(6.9)中的近似变为严格成立,即 "~"改为"="。记 R 系为参考系,b 系为动坐标系,从 t 时刻到 t + Δ t 时刻,b 系从 b(t) 系转动到 b(t + Δ t) 系,当 Δ t 为小量时,对应的欧拉角组与角增量相等,记作

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{b(t)b(t+\Delta t)} = \Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)} = \int_{t}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} \omega_{Rb,x} \\ \omega_{Rb,y} \\ \omega_{Rb,z} \end{bmatrix} dt$$
(6.10)

式中, $\omega_{Rb,x}$ 、 $\omega_{Rb,y}$ 和 $\omega_{Rb,z}$ 为 b 系相对于 R 系的转动角速度向量 ω_{Rb} 在 b(t) 系下的 坐标。将式(6.8)中的 n 替换为 b(t), b 替换为 b(t + Δ t),并取极限有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)} = \mathbf{I}_3 + (\Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)} \times)$$
(6.11)

同理,将式(6.9)中的 n 替换为 b(t), b 替换为 b(t + Δt),并取极限有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} = \mathbf{I}_3 - (\Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)} \times)$$
(6.12)

式(6.11)和式(6.12)中,没有明确写出角增量 $\Delta \theta$ 的投影坐标系(右上标),因为 在取极限的情况下,右上标用 b(t)和 b(t + Δ t)是相等的。初学者在使用式(6.11)和 式(6.12)容易出错,应在理解式(6.8)和式(6.9)的基础上通过坐标系符号替换的方式确保 使用的正确性。在本书约定的符号规则下,可按以下方式记忆:若姿态矩阵的右上标和 右下标分别与角增量的第一、第二右下标相同,则应使用式(6.11);反之,姿态矩阵的 右上标和右下标分别与角增量的第二、第一右下标相同,则应该使用式(6.12)。

6.2.1.5 欧拉角微分方程

当载体存在角运动时,表示姿态的欧拉角也随时间而变, ϕ 、 θ 和 ψ 都是时间的函数。以 n 系为参考系时,欧拉角随时间的变化规律用以下微分方程描述:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\rm nb,x}^{\rm b} \\ \omega_{\rm nb,y}^{\rm b} \\ \omega_{\rm nb,z}^{\rm b} \end{bmatrix}$$
(6.13)

式中, $\omega_{nb,x}^{b}$ 、 $\omega_{nb,y}^{b}$ 和 $\omega_{nb,z}^{b}$ 是 b 系相对于 n 系的转动角速度向量在 b 系下的坐标。上 式对于其它任意两个直角坐标系也是成立的,做相应的符号替换即可。式(6.13)的推导 过程可查阅参考文献[12, p.302]或[37, p.3-57]。 理论上,求解微分方程(6.13)可得欧拉角的表达式,实现姿态角的递推计算。然而, 式(6.13)是一组强非线性微分方程,即微分方程的系数中包含了姿态角(待求参数)的 三角函数。一般情况下,无法得到欧拉角的解析解,工程中通常用数值积分的方法求解 其近似解。另外,式(6.13)的系数矩阵分母中含有 cos θ,在 θ = ±90° 时方程奇异。因 此,**在导航应用中很少采用求解欧拉角微分方程的方式进行姿态更新**,但在某些特定航 天飞行器的姿态控制中可能会选择这一方式,感兴趣的读者可查阅参考文献[38]。

6.2.1.6 欧拉角的特性

欧拉角具有物理含义直观的优点,例如,告知飞机的三个姿态角,很容易想象出它 在空中的姿态。因此,欧拉角通常作为惯性导航系统的姿态结果输出形式。此外,根据 欧拉角计算得到的姿态矩阵(即式(6.6))永远是单位正交矩阵,用该矩阵进行向量的坐 标变换时不存在非正交误差。

然而, 欧拉角存在一个重大缺点——奇异性。以飞机的姿态描述为例, 当俯仰角为 ±90°时, 飞机的纵轴与地理垂向平行, 飞机再绕其立轴(第三次转动, 即 x 轴)转动 时, 无法区分对应的变化是航向角还是横滚角。这种奇异性不仅出现在"ZYX"形式的 欧拉角中, 选择其它任何转轴顺序都存在类似的问题[39, p.74]。因此, 欧拉角法不能用 于全姿态导航¹¹。这种奇异性现象还可从以下不同的角度描述:

- 万向锁问题 (gimbal lock): 在俯仰角为 ±90°时,第一次与第三次转动的旋转 轴共线 (都沿 R 系的 z 轴方向),使得有效转动由 3 次减少为 2 次;对应于平 台式系统的导航平台锁定。
- 方程式的退化问题:当俯仰角 $\theta = \pm 90^{\circ}$ 时,无法根据角速度测量值求解欧拉角 微分方程(6.13),因为此时系数矩阵分母中的 $\cos \theta = 0$ 。

除了存在奇异性,还应注意: 欧拉角组虽然有向量的形式(6.1),但它不是向量,不 满足三维向量的基本运算规则。在惯性导航中使用欧拉角还应注意以下问题:

(1) 两组欧拉角不能做加法来表示转动的叠加或姿态合成。

假设有任意 3 个坐标系 R、b₁ 和 b₂, 已知 R 系到 b₁ 系、R 系到 b₂ 系和 b₁ 系到 b₂ 系的欧拉角组分别为

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{Rb}_{1}} = \begin{bmatrix} \phi_{1} \\ \theta_{1} \\ \psi_{1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{Rb}_{2}} = \begin{bmatrix} \phi_{2} \\ \theta_{2} \\ \psi_{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{b}_{1}\mathrm{b}_{2}} = \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{bmatrix}$$

在一般情况下,有¹²

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{Rb}_{2}}
eq \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{Rb}_{1}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{b}_{1}\mathrm{b}_{2}}$$

¹¹可以证明,任何只用3个实数来表示三维姿态的方法,都会不可避免地遇到奇异性问题。本章6.2.4小 节将介绍的等效旋转矢量也是如此。

¹²只有在各组欧拉角都是小角度或求极限的情况下才能做加减法。而欧拉角关于时间的导数是角速度 向量,满足三维向量的基本运算法则。
例如,在评估惯导姿态精度时,需要对比它与参考系统的姿态输出,得到待测系统的姿态误差序列。一般情况下,尤其当两个惯导存在较大的安装偏角时,不能将两个系统输出的欧拉角序列直接相减,这是初学者容易犯的错误。正确的做法应该使用姿态矩阵或四元数乘法来求姿态差异:

$$\mathbf{C}_{b_1}^{b_2} = \mathbf{C}_n^{b_2} \mathbf{C}_{b_1}^n \tag{6.14}$$

式中, b_1 和 b_2 分别表示待测系统和参考系统的载体坐标系。然后,根据矩阵 $C_{b_1}^{b_2}$ 反算出对应的欧拉角(见附录A.1),即待测系统的姿态误差序列。只有当待测系统与参考系统大致对齐,只存在小角度偏差时,用欧拉角直接相减才近似等于上面公式的计算结果。

(2) 欧拉角组不能做数乘来表示转动的内插或外推。

在惯导与其它传感器组合时(例如惯导与视觉导航的相机组合),由于其它传感器与惯导的采样率和采样时刻都可能不一致,在数据融合解算时涉及姿态的时间内插或外推。例如已知 t_k 到 t_{k+1} 时刻, b 系的姿态变化对应的欧拉角组为 $\mathcal{E}_{b(k)b(k+1)}$,不能用 $0.5\mathcal{E}_{b(k)b(k+1)}$ 来表示 b 系从 t_k 到 $t_{k+0.5}$ 时刻的姿态变化,它不能表达"转动一半"的 物理含义,除非这组欧拉角是小角度时才允许做这种近似处理。值得注意的是,本章介 绍的 4 种姿态表达式中,只有本章6.2.4.2小节的等效旋转矢量可以通过数乘来表示转 动的线性内插或外推。

6.2.2 方向余弦矩阵

方向余弦矩阵 (direction cosine matrix, DCM),又称坐标变换矩阵或姿态矩阵,通 过描述两个坐标系间向量投影变换的方式来表达载体相对于参考系的姿态,相比于欧 拉角显得抽象许多。欧拉角直接描述坐标系的旋转,方向余弦矩阵则对向量在两个坐标 系下的坐标做运算。在理解方向余弦矩阵的概念时,务必区分向量与向量的坐标这两个 概念,只有明确了投影坐标系时,讨论向量的坐标(找到三个实数与之对应)才有意义, 详见第2章2.1.1小节。

完整描述三维向量的坐标变换通常需要七个参数,包括三个平移参数,一个尺度参数和三个旋转参数。在惯性导航中,不考虑坐标系的尺度变化且将载体看做刚体不考虑 其变形,因此不需要考虑尺度参数。平移参数也不是必需的,因为完全可以先通过平移 让两个坐标系的原点对齐。方向余弦矩阵有9个元素,包含了两个坐标系之间相对角度 关系的所有信息,但存在6个自由度的冗余。

6.2.2.1 方向余弦矩阵的概念

假设三维空间中有两个任意直角坐标系 R、b 以及向量 v, 如图6.3所示。b 系 x、y、 z 轴上的单位向量分别记为 i、j、k, R 系 x、y、z 轴上的单位向量分别记为 I、J、K¹³。

¹³(**i**、**j**、**k**) 和 (**I**、**J**、**K**) 是三维空间中的两组基底,是张成三维空间的一组线性无关的向量,有了基 底,三维空间中的任意点或向量在这组基底下就有对应的坐标。



图 6.3 向量 v 在 R 系和 b 系下的投影

向量 v 投影至 b 系坐标轴下做向量分解:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$
(6.15)

式中, $\mathbf{v}^{b} = \begin{bmatrix} v_{1} & v_{2} & v_{3} \end{bmatrix}^{\top}$ 是向量 \mathbf{v} 在 b 系下的坐标。同理, 向量 \mathbf{v} 在 R 系中的投影分量记作:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1' \mathbf{I} + \mathbf{v}_2' \mathbf{J} + \mathbf{v}_3' \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{J}, & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \mathbf{v}_2' \\ \mathbf{v}_3' \end{bmatrix}$$
(6.16)

式中, $\mathbf{v}^{R} = [\mathbf{v}'_{1} \ \mathbf{v}'_{2} \ \mathbf{v}'_{3}]^{\mathsf{T}}$ 是向量 \mathbf{v} 在 R 系下的坐标。式(6.15)和式(6.16)是同一向量 \mathbf{v} 的两组不同分解。因此, 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{J}, & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \mathbf{v}_2' \\ \mathbf{v}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$$
(6.17)

式(6.17)等号两边同时左乘矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{J}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{K}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}$,可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\top}\mathbf{I} & \mathbf{I}^{\top}\mathbf{J} & \mathbf{I}^{\top}\mathbf{K} \\ \mathbf{J}^{\top}\mathbf{I} & \mathbf{J}^{\top}\mathbf{J} & \mathbf{J}^{\top}\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^{\top}\mathbf{I} & \mathbf{K}^{\top}\mathbf{J} & \mathbf{K}^{\top}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1}' \\ \mathbf{v}_{2}' \\ \mathbf{v}_{3}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\top}\mathbf{i} & \mathbf{I}^{\top}\mathbf{j} & \mathbf{I}^{\top}\mathbf{k} \\ \mathbf{J}^{\top}\mathbf{i} & \mathbf{J}^{\top}\mathbf{j} & \mathbf{J}^{\top}\mathbf{k} \\ \mathbf{K}^{\top}\mathbf{i} & \mathbf{K}^{\top}\mathbf{j} & \mathbf{K}^{\top}\mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1} \\ \mathbf{v}_{2} \\ \mathbf{v}_{3} \end{bmatrix}$$
(6.18)

由于单位向量 I, J、K 标准正交 (见第2章2.1.3.1小节), 有

$$\begin{cases} \mathbf{I}^{\top}\mathbf{I} = 1 & \mathbf{I}^{\top}\mathbf{J} = 0 & \mathbf{I}^{\top}\mathbf{K} = 0 \\ \mathbf{J}^{\top}\mathbf{I} = 0 & \mathbf{J}^{\top}\mathbf{J} = 1 & \mathbf{J}^{\top}\mathbf{K} = 0 \\ \mathbf{K}^{\top}\mathbf{I} = 0 & \mathbf{K}^{\top}\mathbf{J} = 0 & \mathbf{K}^{\top}\mathbf{K} = 1 \end{cases}$$
(6.19)

将式(6.19)代入式(6.18),得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \mathbf{v}_2' \\ \mathbf{v}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^\top \mathbf{i} & \mathbf{I}^\top \mathbf{j} & \mathbf{I}^\top \mathbf{k} \\ \mathbf{J}^\top \mathbf{i} & \mathbf{J}^\top \mathbf{j} & \mathbf{J}^\top \mathbf{k} \\ \mathbf{K}^\top \mathbf{i} & \mathbf{K}^\top \mathbf{j} & \mathbf{K}^\top \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$$
(6.20)

式(6.20)记作:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{R}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} \mathbf{v}^{\mathrm{b}} \tag{6.21}$$

式中,

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\top} \mathbf{i} & \mathbf{I}^{\top} \mathbf{j} & \mathbf{I}^{\top} \mathbf{k} \\ \mathbf{J}^{\top} \mathbf{i} & \mathbf{J}^{\top} \mathbf{j} & \mathbf{J}^{\top} \mathbf{k} \\ \mathbf{K}^{\top} \mathbf{i} & \mathbf{K}^{\top} \mathbf{j} & \mathbf{K}^{\top} \mathbf{k} \end{bmatrix}$$
(6.22)

式中, $\mathbf{I}^{\mathsf{T}}\mathbf{i}$ 是 R 系和 b 系 x 轴上两个单位向量的内积,其它元素的含义类似,根据向量内积的定义(2.7),有

$$\mathbf{I}^{\top}\mathbf{i} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{i} = \|\mathbf{I}\| \|\mathbf{i}\| \cos \langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle = \cos \langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle$$
(6.23)

式中, $\langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle$ 是向量 \mathbf{I} 与 \mathbf{i} 的夹角, $\cos \langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle$ 为两个向量的方向余弦值。

矩阵 **C**^R_b 的**每个元素都是两个单位向量的方向余弦值,因此称之为方向余弦矩阵**。 该矩阵刻画了同一向量在两个不同坐标系下的坐标变换关系,**C**^R_b的第1列是b系x轴 上的单位向量i在R系的投影分量或坐标,第2、3列的物理含义与此类似。

本书采用粗体大写字母 C 表示方向余弦矩阵,并明确写出坐标变换对应的两个坐标系,约定右下标表示原坐标系,右上标表示目标坐标系。例如, C^R,读作"C-b-R"(其右角标从下读到上),表示从 b 系到 R 系的坐标变换矩阵。不同书籍和文献对方向余弦矩阵对应的坐标系写法可能不同,有的会将坐标系记成两个右上标或两个右下标的形式。因此,请读者务必清楚并记牢本书的写法,并以坐标变换的形式来理解方向余弦矩阵的物理含义¹⁴。

6.2.2.2 方向余弦矩阵的特性

容易证明方向余弦矩阵是行列式为1的正交矩阵15:

$$(\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}})^{-1} = (\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}})^{\top}$$
(6.24a)

¹⁴方向余弦矩阵也可以从坐标系旋转的角度来理解,它们是等价的反过程。

¹⁵正交矩阵只要求其行列式为±1,但行列式取-1的情况对应瑕变换,即一次旋转加一次反射,不是 惯导姿态解算或向量投影变换所需要的,故舍弃。

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}(\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}})^{\top} = (\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}})^{\top}\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \mathbf{I}_{3}$$
(6.24b)

$$\det(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm R}) = 1 \tag{6.24c}$$

方向余弦矩阵的逆或转置描述了一个相反的坐标变换关系,根据本书的符号规则, 调换方向余弦矩阵的上下角标也表示坐标变换的反过程,因此有

$$\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{b}} = (\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}})^{\top} \tag{6.25}$$

假设有任意右手直角坐标系 a、b、d 和三维向量 v, 根据坐标变换关系, 有:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{b}} = \mathbf{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}} \mathbf{v}^{\mathrm{a}} \tag{6.26a}$$

$$\mathbf{v}^{\mathrm{d}} = \mathbf{C}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{b}} \mathbf{v}^{\mathrm{b}} \tag{6.26b}$$

$$\mathbf{v}^{\mathrm{d}} = \mathbf{C}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{d}} \mathbf{v}^{\mathrm{a}} \tag{6.26c}$$

将式(6.26a)代入式(6.26b),并与式(6.26c)比较,可得:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{a}}^{\mathrm{d}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{d}} \mathbf{C}_{\mathbf{a}}^{\mathrm{b}} \tag{6.27}$$

式(6.27)称作方向余弦矩阵的链乘运算: 两次坐标变换或姿态变化的合成可通过方 向余弦矩阵乘法实现。容易证明,多次坐标变换的叠加则对多个矩阵进行链乘即可,要 求前一(左侧)DCM的右下标与后一(右侧)DCM的右上标相同。方向余弦矩阵的链 乘运算(6.27)常用于表示姿态的更新或分解。例如: 假设 n 系和 b 系在惯性空间中的坐 标轴朝向都随时间而变化,则 t_{k+1} 时刻的姿态矩阵 $\mathbf{C}_{b(k+1)}^{n(k+1)}$ 与 t_k 时刻的姿态矩阵 $\mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)}$ 可通过矩阵链乘关联起来:

$$\mathbf{C}_{b(k+1)}^{n(k+1)} = \mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)} \mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)} \mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)}$$
(6.28)

式中, $\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}$ 反映 n 系的变化(以惯性空间为参照), $\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)}$ 反映 b 系的变化(以惯性空间为参照)。本章6.2.5节将使用公式(6.28)。

6.2.2.3 方向余弦矩阵微分方程

载体坐标系 b 相对参考坐标系 R 做角运动时,对应的方向余弦矩阵 $C_b^R(t)$ 为时变 矩阵。b 系相对于 R 系的转动角速度,记作 $\omega_{Rb}(t)$,是时变向量。载体的实际运动必定 是连续的,姿态矩阵也是关于时间的连续可导函数。根据矩阵导数的定义式(2.42),有

$$\dot{\mathbf{C}}_{b}^{R}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_{b}^{R}(t + \Delta t) - \mathbf{C}_{b}^{R}(t)}{\Delta t}$$
(6.29)

式(6.29)对 b 系与 R 系未做任何限制,它们在空间(例如相对于惯性空间)中的 朝向可随时间变化,但在考察二者之间姿态的变化时,可选择其中一个为参考,看作 不动的坐标系,而将姿态的变化量全部归算到另一坐标系¹⁶。以 R 系为参考系,则有 $R(t + \Delta t) = R(t) = R$,根据方向余弦矩阵的链乘运算式(6.27),有

$$\mathbf{C}_{b}^{R}(t + \Delta t) \triangleq \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{R(t+\Delta t)}$$

$$= \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{R} = \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{R} \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$$
(6.30)

式中, $\mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$ 表示向量从 $b(t+\Delta t)$ 系到 b(t) 系的坐标变换矩阵,反映了 b 系的变化。 b(t) 转动到 $b(t+\Delta t)$ 对应的欧拉角记作 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{b(t)b(t+\Delta t)} = \Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)}$ 。根据式(6.10)和 式(6.11),有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)} = \mathbf{I}_3 + \left[\Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)} \times \right]$$
(6.31)

将式(6.31)代入式(6.30),其结果再代入式(6.29),整理得

$$\dot{\mathbf{C}}_{b}^{R}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_{b(t)}^{R} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)} \times \right]}{\Delta t}$$
(6.32)

根据角速度向量的定义和式(6.10),有

$$\dot{\mathbf{C}}_{b}^{R}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_{b(t)}^{R} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)} \times \right]}{\Delta t}$$
$$= \mathbf{C}_{b(t)}^{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\Delta \boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)} \times \right]}{\Delta t}$$
$$= \mathbf{C}_{b(t)}^{R} [\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(t) \times]$$
(6.33)

式(6.33)中没有明确写出角增量 $\Delta \theta_{b(t)b(t+\Delta t)}$ 的右上标,其投影坐标系可以是 b(t) 或 b(t + Δt),在取极限 $\Delta t \rightarrow 0$ 的情况下, b(t) = b(t + Δt)。后续为书写方便,常省 略式(6.33)的时间变量 t,简写为

$$\dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}} \times) \tag{6.34}$$

式(6.34)为方向余弦矩阵的微分方程,它建立了动坐标系相对于参考坐标系的方向 余弦矩阵与动坐标系运动角速度之间的函数关系,是根据载体角速度测量值实时求解 姿态的基本方程[12, p.15],也称为姿态矩阵微分方程。根据反对称矩阵的相似变换公 式(2.25),有 ($\omega_{Rb}^{b} \times$) = $C_{R}^{b}(\omega_{Rb}^{R} \times)C_{b}^{R}$,代入式(6.34),可得方向余弦矩阵微分方程的另 一等价形式:

$$\dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{R}} \times) \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}$$
(6.35)

式(6.34)和(6.35)对于任意两个直角坐标系都成立,改变坐标系时只需做相应的符号 替换即可。例如,调换方向余弦矩阵的上下角标,有

$$\dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{b}} = \mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{bR}}^{\mathrm{R}} \times) \tag{6.36}$$

¹⁶可以类比于向量:向量是从起点(三维空间中的一个点)指向终点(三维空间中的另一个点)的有向 线段,其起点和终点都可以随时间改变;在考察向量随时间的变化时,可以不失一般性地假设起点不动, 将向量长度和方向的变化全部归因于向量终点的位置发生了变化。

如果以 i 系、e 系和 n 系为参考系,则有

$$\dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{i}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}} \times) \tag{6.37a}$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{eb}}^{\mathrm{b}} \times) \tag{6.37b}$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}} \times) \tag{6.37c}$$

从式(6.37a)可以看出,如果以 i 系为参考进行导航解算,则姿态更新所需的角速度 ω_{ib} 可以由陀螺测量得到。若以 n 系为参考坐标系,则陀螺测量的角速度并不是姿态求 解所需的角速度(如6.1节所述),还需额外补偿地球自转角速度和位移角速度:

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm nb}^{\rm b} = \boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} - \boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm b} \tag{6.38}$$

将式(6.38)代入式(6.34),并考虑反对称矩阵的相似变换(2.25),整理可得:

$$\dot{\mathbf{C}}_{b}^{n} = \mathbf{C}_{b}^{n} \left[(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^{b} \times) \right]
= \mathbf{C}_{b}^{n} \left[(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times) - \mathbf{C}_{n}^{b} (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times) \mathbf{C}_{b}^{n} \right]
= \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times) \mathbf{C}_{b}^{n}$$
(6.39)

式中 $\omega_{in}^{n} = \omega_{ie}^{n} + \omega_{en}^{n}$ 。在第7章7.2.1小节推导惯导姿态误差微分方程过程中将使用式(6.39),因为它很好地区分了陀螺角速度(对应于传感器误差)和待补偿的角速度(对应于位置和速度误差导致的角速度误差)。

6.2.2.4 微分方程的求解

接下来讨论方向余弦矩阵微分方程(6.35)的求解。为书写方便,暂时省略方向余弦 矩阵 \mathbf{C}_{b}^{R} 和角速度向量 $\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}$ 的上下角标,并记反对称矩阵 $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega} \times)$,则方向余弦矩阵 的微分方程式(6.34)简写为

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Omega}(t) \tag{6.40}$$

这是一个典型的时变系数齐次微分方程,需要采用毕卡迭代法 (Picard iteration) 求解,这是一种用于求解微分方程初值问题的数学方法,其基本思想是从一个初始猜测 解出发,通过迭代过程逐步逼近微分方程的实际解。

首先,对式(6.40)在时段 [0,t] 上积分,可得

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) + \int_0^t \mathbf{C}(\tau) \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau$$
(6.41)

式中, C(0) 为积分初始时刻的姿态矩阵。式(6.41)求得的 C(t) 是姿态微分方程(6.40)的 初解, 表达式中仍包含待求函数 C(t), 需要在此基础上进行迭代。

得

第一次迭代:将方程(6.41)等号右边整体代入(6.41)积分号内替换被积函数 $C(t)^{17}$,得

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) + \int_{0}^{t} \left[\mathbf{C}(0) + \int_{0}^{\tau} \mathbf{C}(\tau_{1}) \mathbf{\Omega}(\tau_{1}) d\tau_{1} \right] \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau$$

$$= \mathbf{C}(0) + \mathbf{C}(0) \int_{0}^{t} \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \int_{0}^{t} \int_{0}^{\tau} \mathbf{C}(\tau_{1}) \mathbf{\Omega}(\tau_{1}) d\tau_{1} \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \qquad (6.42)$$

$$= \mathbf{C}(0) \left[\mathbf{I} + \int_{0}^{t} \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right] + \int_{0}^{t} \int_{0}^{\tau} \mathbf{C}(\tau_{1}) \mathbf{\Omega}(\tau_{1}) d\tau_{1} \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau$$

第二次迭代:将方程(6.42)等号右边整体代入式(6.41)积分号内替换被积函数 C(t),

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) \left[\mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right] + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \mathbf{C}(\tau_2) \mathbf{\Omega}(\tau_2) d\tau_2 \mathbf{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau$$
(6.43)

这样不断地进行代入,便得到以无限重积分表示的级数,称作 Peano-Baker 级数¹⁸:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) \left[\mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \mathbf{\Omega}(\tau_2) d\tau_2 \mathbf{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \cdots \right]$$
(6.44)

式(6.44)的**级数是收敛的,但一般情况下得不到闭合形式的解,只有在"定轴转动"** 这一特殊情形下才容易得到闭合解。"定轴转动"的物理含义稍后在6.2.2.5小节中解释, 该条件还可从矩阵乘法的角度描述如下:在"定轴转动"条件下,积分时段内任意两个 时刻的角速度形成的反对称矩阵满足乘法交换律:

$$\mathbf{\Omega}(\tau_1)\mathbf{\Omega}(\tau_2) = \mathbf{\Omega}(\tau_2)\mathbf{\Omega}(\tau_1) , \ \tau_1, \tau_2 \in [0, t]$$
(6.45)

在满足"定轴转动"的条件下,式(6.44)的 Peano-Baker 级数可简化为闭合解形式:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) \exp\left(\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau\right)$$
(6.46)

或写作

$$\mathbf{C}(t + \Delta t) = \mathbf{C}(t) \exp\left(\int_{t}^{t + \Delta t} \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau\right)$$
(6.47)

下面给出闭合解(6.46)的推导过程。根据式(6.45),有

¹⁷注意同时修改积分变量符号和积分上限。

¹⁸Peano-Baker 级数是一种用于表示常微分方程初值问题解的级数,以数学家皮亚诺 (Giuseppe Peano) 和贝克 (Alan Baker) 的名字命名。它可用于证明某些微分方程解的唯一性。Peano-Baker 级数也有其局 限性: 它可能不收敛,或者即使收敛,也可能非常难计算。

$$\int_{0}^{t} \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau = \int_{0}^{t} \mathbf{\Omega}(\tau) \mathbf{\Omega}(t) d\tau$$
(6.48)

注意,上述积分号内变量 $\Omega(t)$ 与积分上限相同,所以在积分区间 [0,t] 内是常量,故有

$$\mathbf{\Omega}(t) \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \mathbf{\Omega}(t)$$
(6.49)

计算以下微分式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau \right]^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left\{ \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau \right] \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau \right] \right\}$$
$$= \mathbf{\Omega}(\mathrm{t}) \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau + \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau \mathbf{\Omega}(\mathrm{t})$$
$$= 2 \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau \mathbf{\Omega}(\mathrm{t})$$
(6.50)

注意,上式最后一个等号是在满足式(6.45)的条件下才成立,对上式两边求积分,假定 $\Omega(0) = 0$,有

$$\int_0^t \int_0^\tau \mathbf{\Omega}(\tau_1) \mathrm{d}\tau_1 \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau \right]^2$$
(6.51)

同理,有

$$\int_{0}^{t} \int_{0}^{\tau} \int_{0}^{\tau_{1}} \mathbf{\Omega}(\tau_{2}) \mathrm{d}\tau_{2} \mathbf{\Omega}(\tau_{1}) \mathrm{d}\tau_{1} \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} \frac{1}{2} \left[\int_{0}^{\tau} \mathbf{\Omega}(\tau_{1}) \mathrm{d}\tau_{1} \right]^{2} \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{6} \left[\int_{0}^{t} \mathbf{\Omega}(\tau) \mathrm{d}\tau \right]^{3}$$
(6.52)

依此类推,在满足"定轴转动"条件下,Peano-Baker 级数可得闭合解形式 $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) \left\{ \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right]^3 + \cdots \right\}$ $= \mathbf{C}(0) \exp\left(\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right)$ (6.53)

针对时段 [0,t],记角增量 $\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(\tau) d\tau$,其模值为 $\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \|\Delta \boldsymbol{\theta}(t)\|$ 。根据反对称矩阵的指数函数式(2.39),有

$$\exp\left(\int_{0}^{t} \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau\right) = \exp\left(\left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times\right]\right)$$

= $\mathbf{I} + \frac{\sin \Delta \theta(t)}{\Delta \theta(t)} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times\right] + \frac{1 - \cos \Delta \theta(t)}{\Delta \theta^{2}(t)} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times\right]^{2}$ (6.54)

将式 (6.54) 代入式 (6.46),并明确写出姿态矩阵的角标,可得

$$\mathbf{C}_{b}^{R}(t) = \mathbf{C}_{b(t)}^{R} = \mathbf{C}_{b(0)}^{R} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$$
(6.55a)

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \Delta\theta(t)}{\Delta\theta(t)} \left[\Delta\theta(t) \times \right] + \frac{1 - \cos \Delta\theta(t)}{\Delta\theta^2(t)} \left[\Delta\theta(t) \times \right]^2$$
(6.55b)

将上述积分时间从 [0,t] 改为 $[t_{k-1},t_k]$,将参考坐标系 R 指定为 i 系,已知前一时 刻 t_{k-1} 的惯导姿态矩阵为 $\mathbf{C}_b^i(t_{k-1}) \equiv \mathbf{C}_{b(k-1)}^i$ 。则求解 t_k 时刻的惯导姿态矩阵 $\mathbf{C}_{b(k)}^i$ 的 递推计算式为

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}(\mathrm{k})}^{\mathrm{i}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}(\mathrm{k}-1)}^{\mathrm{i}} \mathbf{C}_{\mathrm{b}(\mathrm{k})}^{\mathrm{b}(\mathrm{k}-1)} \tag{6.56a}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}(\mathrm{k})}^{\mathrm{b}(\mathrm{k}-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \Delta\theta_{\mathrm{k}}}{\Delta\theta_{\mathrm{k}}} [\Delta\theta_{\mathrm{k}}\times] + \frac{1 - \cos \Delta\theta_{\mathrm{k}}}{\Delta\theta_{\mathrm{k}}^{2}} [\Delta\theta_{\mathrm{k}}\times]^{2}$$
(6.56b)

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) dt, \quad \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \|\Delta \boldsymbol{\theta}_{k}\|$$
(6.56c)

式(6.56a)和式(6.56b)即**在惯性坐标系下姿态矩阵离散化更新的递推计算公式**。如 果选择 e 系或 n 系为参考坐标系,在已知前一时刻姿态矩阵的情况下,也可以套用 式(6.56a)和式(6.56b)进行姿态更新,但需注意公式中的角增量定义应该做相应的修改。 以 n 系下姿态更新为例,更常用的做法是将姿态更新分解为 n 系和 b 系的更新¹⁹:

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$$
(6.57a)

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}(\mathrm{k})}^{\mathrm{b}(\mathrm{k}-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \Delta\theta_{\mathrm{k}}}{\Delta\theta_{\mathrm{k}}} [\Delta\theta_{\mathrm{k}}\times] + \frac{1 - \cos \Delta\theta_{\mathrm{k}}}{\Delta\theta_{\mathrm{k}}^{2}} [\Delta\theta_{\mathrm{k}}\times]^{2}$$
(6.57b)

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) dt, \quad \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \|\Delta \boldsymbol{\theta}_{k}\|$$
(6.57c)

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} = \left(\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k-1)}\right)^{\top} = \mathbf{I} - \frac{\sin\zeta_{k}}{\zeta_{k}}[\boldsymbol{\zeta}_{k}\times] + \frac{1-\cos\zeta_{k}}{\zeta_{k}^{2}}[\boldsymbol{\zeta}_{k}\times]^{2}$$
(6.57d)

$$\boldsymbol{\zeta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{in}^{n}(t) dt = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \left[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}(t) \right] dt, \quad \boldsymbol{\zeta}_{k} = \|\boldsymbol{\zeta}_{k}\|$$
(6.57e)

值得注意的是,式(6.56b)和式(6.57b)严格成立的前提是 b 系在时间段 [t_{k-1},t_k] 内 做定轴转动。对于普通惯性导航应用来说, b 系定轴转动的要求是非常严苛的,一般情况 下都不满足。当该条件不满足时,仍然将陀螺输出的角增量代入式(6.56b)和式(6.57b)中,则会导致姿态更新的**不可交换误差**。该问题在本章6.2.3.5小节求解四元数微分方程时也 将出现,解决途径主要有:

- (1) 强行代入,忽略不可交换误差。该方法相当于6.2.4.4节的单子样算法,对于 角运动不剧烈的载体或精度等级较低的 MEMS 惯导,是可行的。
- (2) 提高惯性导航系统的原始数据采样率,使得积分时段 [t_{k-1},t_k] 尽可能短,从 而确保 b 系在这个时段内的角运动更接近定轴转动。
- (3) 用陀螺输出量人为构造出一个等效的定轴旋转角度"向量",该向量的指向 代表了定轴旋转的方向,模长为绕该轴转动的角度大小,将构造的这种旋转 向量代入式(6.56b)则不存在不可交换误差,这便是6.2.4小节的等效旋转矢量 法。

¹⁹默认以惯性坐标系为参考,考虑 n 系和 b 系的变化,但式中没有明确写出惯性坐标系。

6.2.2.5 可交换性条件的物理含义

记任意时刻 $\tau_1, \tau_2 \in [0, t]$ 的角速度向量为 $\boldsymbol{\omega}(\tau_1) = [\omega_{1x}, \omega_{1y}, \omega_{1z}]^{\top}, \boldsymbol{\omega}(\tau_2) = [\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}]^{\top}, 则可写出 \Omega(\tau_1)\Omega(\tau_2) 和 \Omega(\tau_2)\Omega(\tau_1)$ 的表达式:

 $\boldsymbol{\Omega}(\tau_1)\boldsymbol{\Omega}(\tau_2) = [\boldsymbol{\omega}(\tau_1)\times][\boldsymbol{\omega}(\tau_2)\times] \\
= \begin{bmatrix} -\omega_{1y}\omega_{2y} - \omega_{1z}\omega_{2z} & \omega_{1y}\omega_{2x} & \omega_{1z}\omega_{2x} \\ \omega_{1x}\omega_{2y} & -\omega_{1x}\omega_{2x} - \omega_{1z}\omega_{2y} \\ \omega_{1x}\omega_{2z} & \omega_{1y}\omega_{2z} & -\omega_{1x}\omega_{2x} - \omega_{1y}\omega_{2y} \end{bmatrix}$ (6.58a) $\boldsymbol{\Omega}(\tau_2)\boldsymbol{\Omega}(\tau_1) = [\boldsymbol{\omega}(\tau_2)\times][\boldsymbol{\omega}(\tau_1)\times]$

$$(\tau_2) \mathbf{\Omega}(\tau_1) = [\boldsymbol{\omega}(\tau_2) \times] [\boldsymbol{\omega}(\tau_1) \times] = \begin{bmatrix} -\omega_{1y} \omega_{2y} - \omega_{1z} \omega_{2z} & \omega_{2y} \omega_{1x} & \omega_{2z} \omega_{1x} \\ \omega_{2x} \omega_{1y} & -\omega_{1x} \omega_{2x} - \omega_{1z} \omega_{2z} & \omega_{2z} \omega_{1y} \\ \omega_{2x} \omega_{1z} & \omega_{2y} \omega_{1z} & -\omega_{1x} \omega_{2x} - \omega_{1y} \omega_{2y} \end{bmatrix}$$
(6.58b)

满足可交换性条件,即要求式(6.45)成立,则式(6.58a)与(6.58b)中矩阵各元素相等,可解得

$$\begin{cases}
\omega_{1x}\omega_{2y} = \omega_{2x}\omega_{1y} \\
\omega_{1x}\omega_{2z} = \omega_{2x}\omega_{1z} \\
\omega_{1y}\omega_{2z} = \omega_{2y}\omega_{1z}
\end{cases}$$
(6.59)

(1) 如果
$$\boldsymbol{\omega}(\tau_1)$$
 和 $\boldsymbol{\omega}(\tau_2)$ 的各分量都不为 0, 则有
 $\omega_{1x} \quad \omega_{1y} \quad \omega_{1z}$

$$\frac{\omega_{1x}}{\omega_{2x}} = \frac{\omega_{1y}}{\omega_{2y}} = \frac{\omega_{1z}}{\omega_{2z}}$$
(6.60)

上式也可以写成如下向量的形式:

$$\boldsymbol{\omega}(\tau_1) = \mathbf{c}\boldsymbol{\omega}(\tau_2) \tag{6.61}$$

式(6.61)说明角速度向量 $\omega(\tau_1)$ 与 $\omega(\tau_2)$ 方向相同,由于它们是 [0,t] 时段内任意两 个时刻的角速度向量,则其含义为:在时段 [0,t] 内,b 系相对于参考系的转动角速度 向量方向保持不变,即载体做定轴转动。

(2) 如果角速度向量中的某些分量为 0。例如, 假设 $\omega_{1x} = 0, \omega_{1y} \neq 0, \omega_{1z} \neq 0$, 根 据式(6.59)第一式可得 $\omega_{2x} = 0$, 同时根据第三式, 有

$$\frac{\omega_{2y}}{\omega_{1y}} = \frac{\omega_{2z}}{\omega_{1z}} \tag{6.62}$$

这种情况下 $\omega(\tau_1)$ 与 $\omega(\tau_2)$ 的方向仍然是相同的。同理,当角速度向量中有两个分量为 0 时,也能得出相同的结论。

(3) 当其中一个角速度为零向量时,表示载体静止,是定轴转动的一种特殊情况,此时,式(6.61)中的 c = 0。

综合上述三种情况可得:可交换性条件的物理含义是载体在姿态积分时段内做定 轴转动。

6.2.3 四元数

四元数对于很多读者是个新概念,本节从复数这一"两元数"切入,然后引出四元数。复数可以看作复平面上的一个点或一个向量,例如复数 $z = \rho \cos \phi + i \rho \sin \phi$ 可看作复平面上一个长度为 ρ ,与实轴夹角为 ϕ 的向量,如图6.4所示。应用欧拉公式,该复数可写成指数形式

$$z = \rho e^{i\phi} = \rho \cos \phi + i\rho \sin \phi \tag{6.63}$$

假设另有一个单位长度的复数 z1

$$z_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{6.64}$$

用复数 z1 乘以 z, 有

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z}_1 \mathbf{z} = \rho \mathbf{e}^{\mathbf{i}(\phi+\theta)} \tag{6.65}$$

如图6.4所示,对复数 z 乘以单位复数 $z_1 = e^{i\theta}$ 等效于将向量 z 转动角度 θ 到达 z' 的位置。对于二维复平面,旋转可以用单位复数来描述,类似的,对于三维空间的旋转可用高阶复数(即四元数,quaternion)来描述。四元数是哈密顿(W.R. Hamilton)在将三维向量代数运算推广到乘法和除法运算的研究中建立的一种代数方法。使用四元数来表达姿态比使用欧拉角和方向余弦矩阵更抽象,需通过其旋转算子和欧拉旋转定理来理解它与姿态和向量坐标变换之间的关系,见6.2.3.3小节。



图 6.4 复数对应的向量旋转

6.2.3.1 四元数的基本概念

四元数,记作 q,是由一个实数单位 1 和三个虚数单位 i、j、k 组成并具有下列形 式的数

$$\mathbf{q} = q_0 1 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \tag{6.66}$$

式中, q₀、q₁、q₂、q₃均为实数。q₀1为四元数的实部,乘以1不会改变实数q₀,即实 部单位1保持普通标量的性质。由于这种缘故,以后在四元数的表达式中,第一项q₀

将不明确写出其单位 1。四元数的三个虚部单位 i、j、k 满足以下运算规则:

$$1 \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ 1 = \mathbf{i}, \ 1 \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ 1 = \mathbf{j}, \ 1 \circ \mathbf{k} = \mathbf{k} \circ 1 = \mathbf{k}, \ 1 \circ 1 = 1$$
$$\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = -1, \ \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = -1, \ \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = -1$$
$$(6.67)$$
$$\mathbf{i} \circ \mathbf{j} = -\mathbf{j} \circ \mathbf{i} = \mathbf{k}, \ \mathbf{j} \circ \mathbf{k} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{j} = \mathbf{i}, \ \mathbf{k} \circ \mathbf{i} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

式中,"o"为四元数的乘法运算符,后续四元数乘法都将明确写出该运算符,以免跟向量的点乘运算混淆。四元数虚部单位之间的乘法有如下特点:各单位与自身相乘时,表现与复数一样,而两两之间的乘法则与三维向量的外积(叉乘)一样。利用图 6.5的图示法容易记住这一规则:按箭头方向排列的两个单位相乘时,便得到带正号的第三个单位;当逆箭头方向移动时,便得到带负号的第三个单位。在这样的乘法规则下,两个四元数之积仍为四元数。



图 6.5 四元数虚数单位的乘法规则图示

四元数的单位 1、i、j、k 可看作四维空间(记作 H)中的一组基。于是,任何四元 数都可看作空间 H 中的一个点或向量,可写成向量的坐标形式:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{6.68}$$

在空间 H 中四元数的加法以及四元数同标量的相乘和普通向量空间中是一样的。 空间 H 对乘法和除法运算封闭。

此外,单位 **i**、**j**、**k** 也可看作三维空间的单位向量, q_1 、 q_2 、 q_3 看作向量的分量。因此,四元数也可以写成一个标量 q_0 和一个向量 \mathbf{q}_v 的形式²⁰:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_v, \quad \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{q}_v = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]^\top \in \mathbb{R}^3$$

$$(6.69)$$

或记作如下形式:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \tag{6.70}$$

²⁰为方便起见,向量部分以普通向量的形式写出。

四元数的向量部分与三维空间中的向量一一映射,如图6.6所示。如果一个四元数的标量部分为0,则称为**纯虚四元数**,也有学者将其称作纯四元数(pure quaternion)或 零标量四元数;反之,若它的向量部分为0,则称为**实四元数**。特别地,如果四元数的 实部为1,三个虚部都为0,称为四元数的**单位元**(identity)。在四元数代数中,单位元 与实数中的1相当,因为其它四元数与之相乘后保持不变,类似于实数乘法中的1。实 部和虚部都为零的四元数则称为**零四元数**,与实数0对应。

注意,式(6.66)、(6.68)、(6.69)和(6.70)是四元数的不同表示形式,完全等价。它们 在公式推导和做向量运算时各有便利性。



图 6.6 三维向量与纯虚四元数的一一映射关系

6.2.3.2 四元数的基本运算

四元数可以进行一系列的运算,常见的有四则运算、共轭、求逆和数乘等。下面仅 介绍与惯性导航姿态表达相关的基本运算,证明过程从略。对四元数代数感兴趣的读者 可阅读文献[39, 40]。假设有标量 *r、s* 和以下 3 个四元数:

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}_v = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$
$$\mathbf{p} = p_0 + \mathbf{p}_v = p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}$$
$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \mathbf{\Lambda}_v = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_3 \mathbf{k}$$

(1) 如果两个四元数 q 和 p 的诸元相等,则这两个四元数相等。

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} \Leftrightarrow \begin{cases} q_0 = p_0 \\ q_1 = p_1 \\ q_2 = p_2 \\ q_3 = p_3 \end{cases}$$
(6.71)

(2) 两个四元数 q 和 p 加减法定义为

$$\mathbf{q} \pm \mathbf{p} = (q_0 \pm p_0) + (q_1 \pm p_1)\mathbf{i} + (q_2 \pm p_2)\mathbf{j} + (q_3 \pm p_3)\mathbf{k}$$
 (6.72)

$$\mathbf{q} \pm \mathbf{p} = q_0 \pm p_0 + \mathbf{q}_v \pm \mathbf{p}_v \tag{6.73}$$

6.2 姿态算法

(3) 四元数乘以标量 s 时,所有各元都乘以该数:

$$s\mathbf{q} = s\mathbf{q}_0 + s\mathbf{q}_1\mathbf{i} + s\mathbf{q}_2\mathbf{j} + s\mathbf{q}_3\mathbf{k} \tag{6.74}$$

四元数的加法及四元数同标量的乘法都服从一般代数运算规则:

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad (\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathbf{\Lambda} = \mathbf{q} + (\mathbf{p} + \mathbf{\Lambda})$$
 (6.75)

$$s\mathbf{q} = \mathbf{q}s, \quad (rs)\mathbf{q} = \mathbf{q}(sr)$$
 (6.76)

$$(r+s)\mathbf{q} = r\mathbf{q} + s\mathbf{q}, \quad s(\mathbf{q}+\mathbf{p}) = s\mathbf{q} + s\mathbf{p}$$
 (6.77)

(4) 四元数的乘法: 四元数 **p** 与 **q** 相乘等于 **p** 的诸元与 **q** 诸元按照(6.67)规则做乘 法,最后相加:

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = (p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) \circ (q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k})$$

= $p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3$
+ $(p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2) \mathbf{i}$ (6.78)
+ $(p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3) \mathbf{j}$
+ $(p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1) \mathbf{k}$

式(6.78)的结果相对复杂,但形式上是整齐有序的,可整理成不同的表达形式。对式(6.78)结果稍加整理,可写成如下形式:

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = p_0 q_0 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + p_0 (q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) + q_0 (p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) + (p_2 q_3 - p_3 q_2) \mathbf{i} + (p_3 q_1 - p_1 q_3) \mathbf{j} + (p_1 q_2 - p_2 q_1) \mathbf{k}$$
(6.79)

四元数 **q** 和 **p** 的向量部分记作 $\mathbf{q}_v = [q_1 \ q_2 \ q_3]^\top$ 和 $\mathbf{p}_v = [p_1 \ p_2 \ p_3]^\top$,根据向量 点乘公式(2.8)和叉乘公式(2.15),可将式(6.79)写成简洁形式:

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = (\mathbf{p}_{s} + \mathbf{p}_{v}) \circ (\mathbf{q}_{s} + \mathbf{q}_{v})$$

= $\mathbf{p}_{s}\mathbf{q}_{s} + \mathbf{p}_{s}\mathbf{q}_{v} + \mathbf{q}_{s}\mathbf{p}_{v} + \mathbf{p}_{v} \circ \mathbf{q}_{v}$
= $(\mathbf{p}_{s}\mathbf{q}_{s} - \mathbf{p}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v}) + (\mathbf{p}_{s}\mathbf{q}_{v} + \mathbf{q}_{s}\mathbf{p}_{v} + \mathbf{p}_{v} \times \mathbf{q}_{v})$ (6.80)

注意,当写出 $\mathbf{p}_v \circ \mathbf{q}_v$ 时,将 $\mathbf{p}_v \pi \mathbf{q}_v$ 看成纯虚四元数 $0 + \mathbf{p}_v \pi 0 + \mathbf{q}_v$ 。而写出 $\mathbf{p}_v^{\mathsf{T}} \mathbf{q}_v \pi \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v$ 时,将它们看成三维向量。特别的,两个纯虚四元数相乘,则有

$$\mathbf{p}_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{q}_{\mathbf{v}} = (0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) \circ (0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k})$$

= $-\mathbf{p}_{\mathbf{v}}^{\top} \mathbf{q}_{\mathbf{v}} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}} \times \mathbf{q}_{\mathbf{v}}$ (6.81)

6.2 姿态算法

四元数可写作四维空间 **H** 中向量的坐标形式(6.68),四元数 **p** 和 **q** 的乘积还是四 元数,也写成 4 × 1 的向量形式。则式(6.78)整理成如下矩阵的形式:

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$
(6.82)
$$= \mathbf{M}_{\mathbf{p}} \mathbf{q} = \mathbf{M}_{\mathbf{q}}^* \mathbf{p}$$

式中, M_p 和 M_q^* 分别是四元数乘法运算符左侧和右侧四元数各元素组成的矩阵, 是四元数向 4 阶方阵的一种映射:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_{0} & -p_{1} & -p_{2} & -p_{3} \\ p_{1} & p_{0} & -p_{3} & p_{2} \\ p_{2} & p_{3} & p_{0} & -p_{1} \\ p_{3} & -p_{2} & p_{1} & p_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{0} & -\mathbf{p}_{\mathbf{v}}^{\top} \\ p_{\mathbf{v}} & p_{0}\mathbf{I}_{3} + (\mathbf{p}_{\mathbf{v}} \times) \end{bmatrix}$$
(6.83)

$$\mathbf{M}_{q}^{*} = \begin{bmatrix} q_{0} & -q_{1} & -q_{2} & -q_{3} \\ q_{1} & q_{0} & q_{3} & -q_{2} \\ q_{2} & -q_{3} & q_{0} & q_{1} \\ q_{3} & q_{2} & -q_{1} & q_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0} & -\mathbf{q}_{v}^{\top} \\ \mathbf{q}_{v} & q_{0}\mathbf{I}_{3} - (\mathbf{q}_{v}\times) \end{bmatrix}$$
(6.84)

四元数乘法不满足交换律:由于两个四元数的乘积式(6.80)包含向量的叉乘项 $\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v$ 。因此,一般情况下, $\mathbf{p} \circ \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \circ \mathbf{p}_o$ 。当且仅当 $\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v = \mathbf{q}_v \times \mathbf{p}_v$ 时,即两个四元数的向量部分至少有一个为零向量或 \mathbf{p}_v 与 \mathbf{q}_v 共线时,四元数的乘法才满足交换律。四元数乘法与矩阵的乘法类似,满足结合律和对加法的分配律:

$$(\mathbf{p} \circ \mathbf{q}) \circ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{p} \circ (\mathbf{q} \circ \mathbf{\Lambda}) \tag{6.85}$$

$$\mathbf{p} \circ (\mathbf{q} + \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{p} \circ \mathbf{q} + \mathbf{p} \circ \mathbf{\Lambda}$$
(6.86)

(5) 共轭:将四元数 q 虚部反号得到对应的共轭四元数 q*,即

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1 \mathbf{i} - \mathbf{q}_2 \mathbf{j} - \mathbf{q}_3 \mathbf{k}$$

= $\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_v$ (6.87)

四元数与其共轭四元数相乘,得到一个实四元数:

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^* = \mathbf{q}_{\mathrm{s}}^2 + \mathbf{q}_{\mathrm{v}}^\top \mathbf{q}_{\mathrm{v}} \tag{6.88}$$

四元数共轭满足以下运算:

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^* \tag{6.89a}$$

 $\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \circ \mathbf{q} \tag{6.89b}$

$$(\mathbf{p} \circ \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \circ \mathbf{p}^* \tag{6.89c}$$

$$(\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 \circ \cdots \circ \mathbf{q}_n)^* = \mathbf{q}_n^* \circ \mathbf{q}_{n-1}^* \circ \cdots \circ \mathbf{q}_2^* \circ \mathbf{q}_1^*$$
(6.89d)

(6) 四元数的模定义为:

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}_0^2 + \mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2 + \mathbf{q}_3^2} \tag{6.90}$$

四元数的模的定义与四维空间中向量长度的定义是一致的。模为1的四元数称作 **单位四元数** (unit quaternion) 或规范化四元数 (normalized quaternion)。容易验证,两 个四元数乘积的模等于模的乘积

$$\|\mathbf{p} \circ \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \tag{6.91}$$

式(6.91)表明两个单位四元数的乘积仍是单位四元数,这对于惯导姿态的表达和更 新来说是一个很重要的性质。

(7) 四元数的逆:任意非零四元数 q 都有与之对应的逆,记作 q⁻¹,定义为

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q} = 1 \tag{6.92}$$

式中,等号右边的1为四元数的单位元,上式左乘或右乘 q*,有

$$\mathbf{q}^* \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*$$
(6.93)

根据四元数模的定义式(6.90),有 $\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^* = \|\mathbf{q}\|^2$,代入式(6.93)有

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2} \tag{6.94}$$

如果 q 为单位四元数,则它的逆等于它的共轭四元数。四元数的逆满足以下规律:

$$(\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 \circ \cdots \circ \mathbf{q}_n)^{-1} = \mathbf{q}_n^{-1} \circ \mathbf{q}_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \mathbf{q}_2^{-1} \circ \mathbf{q}_1^{-1}$$
(6.95)

(8)四元数的归一化:若四元数的模不等于 0,则称 **q** ||**q**|| 为四元数的归一化或规范 化操作,归一化后的四元数是单位四元数。

6.2.3.3 姿态四元数

任意非零四元数 q 都可以改写成如下形式:

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \left(\frac{\mathbf{q}_0}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{i} + \mathbf{q}_2 \mathbf{j} + \mathbf{q}_3 \mathbf{k}}{\|\mathbf{q}\|}\right) = \|\mathbf{q}\| \left(\frac{\mathbf{q}_0}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}\|}\right)$$
(6.96)

引入一个沿 qv 方向上的单位向量 u:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}_{\rm v}}{\sqrt{{\rm q}_1^2 + {\rm q}_2^2 + {\rm q}_3^2}} \tag{6.97}$$

将式(6.97)代入式(6.96),得

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \left(\frac{\mathbf{q}_0}{\|\mathbf{q}\|} + \mathbf{u} \frac{\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2 + \mathbf{q}_3^2}}{\|\mathbf{q}\|} \right)$$
(6.98)

根据四元数模的定义(6.90),可以引入变量:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\|\mathbf{q}\|}$$
(6.99)

式中, θ 对应一个转动角度。式(6.99)引入变量 $\theta/2$ 而非 θ 的原因在于:四元数 q 将使向量转动角度 θ 而不是 $\theta/2$,稍后将给出证明和解释。应用上述符号,四元数 q 可表示为如下三角函数形式:

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{6.100}$$

特别的,对于单位四元数,有

$$\mathbf{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2} \tag{6.101}$$

对于任意单位向量 u 和角度 θ ,根据式(6.101)都可写出对应的单位四元数,可以看 作 u 和 θ 到单位四元数的一种映射关系。如果给定的 u 和 θ 有明确的几何意义,则对 应的单位四元数也有了实际的物理含义。

刚体运动的欧拉定理指出"刚体(或与刚体固连的坐标系)绕固定点的有限次转动 等价于绕经过该固定点的某个轴的一次转动"。如图6.7所示,R 系经过3次转动(有限 次转动)后与 b 系对齐;总可以找到一个过 R 系原点的旋转轴(轴上的单位向量记作 **u**_{Rb}),使得 R 系绕 **u**_{Rb} 做一次旋转后与 b 系对齐,转动角度记作 *θ*。



图 6.7 坐标系的等效转动

根据式(6.101),可写出与 \mathbf{u}_{Rb} 和 θ 对应的单位四元数

$$\mathbf{q}_{\rm b}^{\rm R} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}_{\rm Rb}\sin\frac{\theta}{2} \tag{6.102}$$

由于 **u**_{Rb} 和 θ 完整描述了 b 系相对 R 系的转动关系,则单位四元数 **q**_b^R 便包含了 b 系与 R 系的相对姿态关系,因而称之为**姿态四元数**。后续将明确写出姿态四元数的右上标和右下标,表示对应的坐标系,书写规则可通过式(6.102)记忆:姿态四元数向量部分的第一个右下标与四元数的右上标一致,向量第二个右下标与四元数的右下标一致。 若调换四元数的上下角标顺序,则结果与原四元数互为共轭,即

$$\mathbf{q}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{b}} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u}_{\mathrm{bR}} \sin \frac{\theta}{2}$$
$$= \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{u}_{\mathrm{Rb}} \sin \frac{\theta}{2}$$
$$= (\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}})^{*}$$
(6.103)

姿态四元数对向量(或坐标系各轴的单位向量)的转动通过其旋转算子 *L*_q 来实现, 描述为以下定理。

定理: 对于任意单位四元数
$$\mathbf{q} = \cos(\theta/2) + \mathbf{u}\sin(\theta/2)$$
 和三维向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, 算子
$$\mathcal{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = \mathbf{q} \circ \begin{bmatrix} 0\\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \circ \mathbf{q}^*$$
(6.104)

的作用是使向量 v 绕向量 u 的正方向旋转角度 θ (注意不是 $\theta/2$), 如图6.8所示。证 明见附录A.2。



图 6.8 单位四元数的旋转算子

根据姿态四元数的旋转算子(6.104)可以证明,向量从 b 系到 R 系的坐标变换为

$$\mathbf{v}^{\mathrm{R}} = \mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} \circ \mathbf{v}^{\mathrm{b}} \circ \left(\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}\right)^{*} \tag{6.105}$$

式中, v 看作纯虚四元数 v = 0 + v。姿态四元数必须是单位四元数,因为如果四元数 q_b^R 的模不等于 1,则向量 v 经过算子 $\mathcal{L}_q(v)$ 后,不仅发生旋转,还会出现长度的拉伸 或压缩,这是姿态表达和向量投影变换不希望出现的。

假设有任意右手直角坐标系 a、b、d 和三维向量 v, 根据坐标变换式(6.105), 有:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{a}} = \mathbf{q}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}} \circ \mathbf{v}^{\mathrm{d}} \circ (\mathbf{q}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}})^{*} \tag{6.106a}$$

$$\mathbf{v}^{\mathrm{b}} = \mathbf{q}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{d}} \circ \mathbf{v}^{\mathrm{d}} \circ (\mathbf{q}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{d}})^* \tag{6.106b}$$

将式(6.106b)代入式(6.105),可得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{a} &= \mathbf{q}^{a}_{b} \circ \mathbf{q}^{b}_{d} \circ \mathbf{v}^{d} \circ (\mathbf{q}^{b}_{d})^{*} \circ (\mathbf{q}^{a}_{b})^{*} \\ &= \left(\mathbf{q}^{a}_{b} \circ \mathbf{q}^{b}_{d}\right) \circ \mathbf{v}^{d} \circ (\mathbf{q}^{a}_{b} \circ \mathbf{q}^{b}_{d})^{*} \\ &= \mathbf{q}^{a}_{d} \circ \mathbf{v}^{d} \circ (\mathbf{q}^{a}_{d})^{*} \end{aligned}$$
(6.107)

对比式(6.107)和(6.106a),可得

$$\mathbf{q}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}} = \mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} \circ \mathbf{q}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{b}} \tag{6.108}$$

式(6.108)称作姿态四元数的链乘运算,表明:两次坐标变换或姿态变化的合成可 通过对应的姿态四元数相乘来实现。多次坐标变换的叠加则对多个姿态四元数进行链 乘,要求四元数乘法运算符左侧四元数的下标与右侧四元数的上标相同,与方向余弦矩 阵的链乘运算式(6.28)类似。姿态四元数的链乘运算常用于表示姿态的更新或分解,详 见6.2.5节。例如:假设 n 系和 b 系在惯性空间中的坐标轴朝向随时间而变化,则 t_{k+1} 时刻的姿态矩阵 $\mathbf{q}_{b(k+1)}^{n(k+1)}$ 与 t_k 时刻的坐标变换矩阵 $\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)}$ 可通过姿态四元数链乘关联起 来:

$$\mathbf{q}_{b(k+1)}^{n(k+1)} = \mathbf{q}_{n(k)}^{n(k+1)} \circ \mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} \circ \mathbf{q}_{b(k+1)}^{b(k)}$$
(6.109)

式中, $\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k+1)}$ 反映 n 系相对惯性系的变化, $\mathbf{q}_{b(k+1)}^{b(k)}$ 反映 b 系相对惯性系的变化。

6.2.3.4 四元数的微分方程

假设动坐标系 b 相对参考系 R 以角速度 ω_{Rb} 转动,则 b 系相对于 R 系的姿态四 元数 \mathbf{q}_b^R 随时间变化,是时间的函数。b 系在 t 和 t + Δ t 时刻的空间朝向(即瞬时坐标 系)记作 b(t) 和 b(t + Δ t)。根据姿态四元数的链乘运算式(6.108),有

$$\mathbf{q}_{b(t+\Delta t)}^{R} = \mathbf{q}_{b(t)}^{R} \circ \mathbf{q}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$$
(6.110)

式中, $\mathbf{q}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$ 为 b(t) 到 b(t + Δ t) 系的姿态四元数, 一次等效转动的转轴单位向量记 作 $\mathbf{u}_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)}$, 转角为 $\Delta\theta$, 根据式(6.102), 有

$$\mathbf{q}_{\mathbf{b}(t+\Delta t)}^{\mathbf{b}(t)} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\Delta\theta}{2} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t+\Delta t)}^{\mathbf{b}(t)} \sin\frac{\Delta\theta}{2} \end{bmatrix}$$
(6.111)

由于向量 $\mathbf{u}_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)}$ 位于旋转轴上,则它在 b(t) 和 b(t + Δt)下的坐标相等,其投 影坐标系(右上标)写为 b(t)或 b(t + Δt)均可,且在时间段 [t, t + Δt]内向量方向 保持不变。将转角 $\Delta \theta$ 和单位向量 $\mathbf{u}_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)}$ 的乘积记作 $\Delta \theta$

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \Delta \boldsymbol{\theta} \mathbf{u}_{\mathbf{b}(\mathbf{t})\mathbf{b}(\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t})}^{\mathbf{b}(\mathbf{t})} \tag{6.112}$$

角增量向量 $\Delta \theta$ 关于时间的导数为角速度向量,记作

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}(\mathbf{t})\mathbf{b}(\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t})}^{\mathbf{b}(\mathbf{t})} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}}{\Delta \mathbf{t}} = \mathbf{u}_{\mathbf{b}(\mathbf{t})\mathbf{b}(\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t})}^{\mathbf{b}(\mathbf{t})} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}}{\Delta \mathbf{t}}$$
(6.113)

在考察 [t, t + Δ t] 时段内的姿态变化时, b(t) 系为过去时刻的已知坐标系,它相 对 R 系固结,因此角速度向量 $\omega_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)}$ 又可写作

$$\boldsymbol{\omega}_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)} = \boldsymbol{\omega}_{Rb(t+\Delta t)}^{b(t)}$$
(6.114)

取极限时,有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t+\Delta t)}^{\mathbf{b}(t)} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Rb}(t)}^{\mathbf{b}(t)}$$
(6.115)

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,转角值 $\Delta \theta \rightarrow 0$,此时有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \cos \frac{\Delta \theta}{2} = 1 \tag{6.116}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sin \frac{\Delta \theta}{2} = \frac{\Delta \theta}{2} \tag{6.117}$$

将式(6.116)、式(6.117)和式(6.112)代入式(6.111)并取极限,得

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{q}_{\mathrm{b}(\mathrm{t}+\Delta \mathrm{t})}^{\mathrm{b}(\mathrm{t})} = \begin{bmatrix} 1\\ \underline{\Delta \theta}\\ \underline{2} \end{bmatrix}$$
(6.118)

根据导数的定义,有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{b}^{R}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{b}^{R}(t + \Delta t) - \mathbf{q}_{b}^{R}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{b(t)}^{R} \circ \mathbf{q}_{b(t + \Delta t)}^{b(t)} - \mathbf{q}_{b(t)}^{R}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{b(t)}^{R} \circ (\mathbf{q}_{b(t + \Delta t)}^{b(t)} - \mathbf{q}_{1})}{\Delta t} \end{aligned}$$
(6.119)

式中, $q_1 = 1 + 0$ 为单位元四元数,将式(6.118)代入式(6.119),得

$$\dot{\mathbf{q}}_{b}^{R}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{b(t)}^{R} \circ \left(\mathbf{q}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)} - \mathbf{q}_{1}\right)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{b(t)}^{R} \circ \left(\begin{bmatrix} 1\\ \Delta \theta/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix}\right)}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{b(t)}^{R} \circ \begin{bmatrix} 0\\ \Delta \theta \end{bmatrix}}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}_{b(t)}^{R} \circ \begin{bmatrix} 0\\ \Delta \theta \end{bmatrix}}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}_{b}^{R}(t) \circ \begin{bmatrix} 0\\ \boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(t) \end{bmatrix}$$
(6.120)

式(6.120)即为姿态四元数的微分方程,根据四元数乘积的矩阵形式(6.84),式(6.120)可写作

$$\dot{\mathbf{q}}_{b}^{R}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{M}_{\omega}^{*} \mathbf{q}_{b}^{R}(t)$$
(6.121)

$$\mathbf{M}_{\omega}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\mathrm{Rb},x}^{\mathrm{b}} & -\omega_{\mathrm{Rb},y}^{\mathrm{b}} & -\omega_{\mathrm{Rb},z}^{\mathrm{b}} \\ \omega_{\mathrm{Rb},x}^{\mathrm{b}} & 0 & \omega_{\mathrm{Rb},z}^{\mathrm{b}} & -\omega_{\mathrm{Rb},y}^{\mathrm{b}} \\ \omega_{\mathrm{Rb},y}^{\mathrm{b}} & -\omega_{\mathrm{Rb},z}^{\mathrm{b}} & 0 & \omega_{\mathrm{Rb},x}^{\mathrm{b}} \\ \omega_{\mathrm{Rb},z}^{\mathrm{b}} & \omega_{\mathrm{Rb},y}^{\mathrm{b}} & -\omega_{\mathrm{Rb},x}^{\mathrm{b}} & 0 \end{bmatrix}$$
(6.122)

式中, $\omega_{Rb,x}^{b}$ 、 $\omega_{Rb,y}^{b}$ 、 $\omega_{Rb,z}^{b}$ 为 b 系相对于 R 系的角速度向量在 b 系下的坐标,是时间的函数 (式中没有明确写出时间变量 t)。

6.2.3.5 四元数微分方程的求解

姿态四元数的微分方程(6.121)是一个典型的时变系数齐次微分方程,求解的过程与本章6.2.2.4小节方向余弦矩阵微分方程的求解类似,在此不做详细推导。只有在积分时段 [0, t] 内满足定轴转动条件时,才能求得闭合解

$$\mathbf{q}_{b}^{R}(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}(t)\right)\mathbf{q}_{b}^{R}(0)$$
(6.123)

式中, $\mathbf{q}_{b}^{R}(t)$ 为 t 时刻的姿态四元数, $\mathbf{q}_{b}^{R}(0)$ 为积分开始时刻的姿态四元数, 即积分初值。其中,

$$\boldsymbol{\Theta}(t) \triangleq \int_{0}^{t} \mathbf{M}_{\omega}^{*} d\tau = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_{x}(t) & -\Delta\theta_{y}(t) & -\Delta\theta_{z}(t) \\ \Delta\theta_{x}(t) & 0 & \Delta\theta_{z}(t) & -\Delta\theta_{y}(t) \\ \Delta\theta_{y}(t) & -\Delta\theta_{z}(t) & 0 & \Delta\theta_{x}(t) \\ \Delta\theta_{z}(t) & \Delta\theta_{y}(t) & -\Delta\theta_{x}(t) & 0 \end{bmatrix}$$
(6.124a)

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \theta_{x}(t) & \Delta \theta_{y}(t) & \Delta \theta_{z}(t) \end{bmatrix}^{\top} = \int_{0}^{t} \boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(\tau) d\tau \qquad (6.124b)$$

$$\Delta\theta(t) = \sqrt{\Delta\theta_{\rm x}^2(t) + \Delta\theta_{\rm y}^2(t) + \Delta\theta_{\rm z}^2(t)}$$
(6.124c)

式中, $\Delta \theta$ (t)为时段 [0, t]内的角增量,其模值记为 $\Delta \theta$ (t) = $\|\Delta \theta$ (t) $\|$ 。为书写简洁,本 节剩余部分将 Θ (t)和 $\Delta \theta$ (t)简记为 Θ 和 $\Delta \theta$ 。容易证明矩阵 Θ 有如下性质:

$$\begin{cases} \Theta^{2} = -\Delta\theta^{2}\mathbf{I}_{4} \\ \Theta^{3} = \Theta^{2}\Theta = -\Delta\theta^{2}\Theta \\ \Theta^{4} = \Theta^{3}\Theta = -\Delta\theta^{2}\Theta\Theta = \Delta\theta^{4}\mathbf{I}_{4} \\ \Theta^{5} = \Theta^{4}\Theta^{=}\Delta\theta^{4}\Theta \\ \dots \end{pmatrix}$$
(6.125)

将式(6.123)中的矩阵指数函数展开成级数形式:

$$\exp\left(\frac{1}{2}\Theta\right) = \mathbf{I}_4 + \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^n + \dots$$
(6.126)

将式(6.125)代入式(6.126),可得

$$\exp\left(\frac{1}{2}\Theta\right) = \mathbf{I}_{4} + \frac{\Theta}{2} - \frac{\mathbf{I}_{4}}{2!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^{2} \frac{\Theta}{2} + \frac{\mathbf{I}_{4}}{4!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^{4} + \cdots$$

$$= \mathbf{I}_{4} \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^{2} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^{4} - \cdots\right]$$

$$+ \frac{\Theta}{\Delta\theta} \left[\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^{3} + \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^{5} - \cdots\right]$$

$$= \mathbf{I}_{4} \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Theta}{\Delta\theta} \sin\frac{\Delta\theta}{2}$$
(6.127)

将式(6.127)代入式(6.123),可得

$$\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = \left[\mathbf{I}\cos\frac{\Delta\theta(\mathrm{t})}{2} + \frac{\mathbf{\Theta}(\mathrm{t})}{\Delta\theta(\mathrm{t})}\sin\frac{\Delta\theta(\mathrm{t})}{2}\right]\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}(0) \triangleq \mathbf{M}_{\Delta}^{*}\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}(0)$$
(6.128a)

$$\mathbf{M}_{\Delta}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & -\mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{x}}(t) & -\mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{y}}(t) & -\mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{z}}(t) \\ \mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{x}}(t) & \mathbf{m} & \mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{z}}(t) & -\mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{y}}(t) \\ \mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{y}}(t) & -\mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{z}}(t) & \mathbf{m} & \mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{z}}(t) & \mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{y}}(t) & -\mathbf{n}\Delta\theta_{\mathbf{x}}(t) & \mathbf{m} \end{bmatrix}$$
(6.128b)

式中, m = $\cos \frac{\Delta \theta}{2}$, n = $\frac{1}{\Delta \theta} \sin \frac{\Delta \theta}{2}$ 。根据式(6.82),可将式(6.128a)等号右边矩阵形式 改成四元数乘积形式:

$$\mathbf{q}_{b}^{R}(t) = \mathbf{q}_{b}^{R}(0) \circ \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta \theta(t)}{2} \\ \frac{\Delta \theta(t)}{\Delta \theta(t)} \sin \frac{\Delta \theta(t)}{2} \end{bmatrix}$$
(6.129)

若将积分时间从 [0, t] 改为 $[t_{k-1}, t_k]$,将参考坐标系 R 指定为 i 系,已知前一时刻 t_{k-1} 的姿态四元数为 $\mathbf{q}_b^i(t_{k-1}) = \mathbf{q}_{b(k-1)}^i$ 。则求解 t_k 时刻姿态四元数的递推计算式为

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{i} = \mathbf{q}_{b(k-1)}^{i} \circ \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$
(6.130a)

$$\mathbf{q}_{\mathrm{b}(\mathrm{k})}^{\mathrm{b}(\mathrm{k}-1)} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta \theta_{\mathrm{k}}}{2} \\ \frac{\Delta \theta_{\mathrm{k}}}{\Delta \theta_{\mathrm{k}}} \sin \frac{\Delta \theta_{\mathrm{k}}}{2} \end{bmatrix}$$
(6.130b)

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) dt, \quad \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \|\Delta \boldsymbol{\theta}_{k}\|$$
(6.130c)

式(6.130a)和式(6.130b)即在惯性坐标系下姿态更新的递推计算公式,对于常见的地 球表面导航问题实用价值不大。与方向余弦矩阵的递推计算类似,如果选择 e 系或 n 系 为参考坐标系,以 n 系下姿态更新为例,通常的做法是将姿态更新分解为 n 系和 b 系 的更新²¹:

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \circ \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \circ \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$
(6.131a)

$$\mathbf{q}_{\mathbf{b}(\mathbf{k})}^{\mathbf{b}(\mathbf{k}-1)} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta \theta_{\mathbf{k}}}{2} \\ \frac{\Delta \theta_{\mathbf{k}}}{\Delta \theta_{\mathbf{k}}} \sin \frac{\Delta \theta_{\mathbf{k}}}{2} \end{bmatrix}$$
(6.131b)

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) dt, \quad \Delta \theta_{k} = \|\Delta \boldsymbol{\theta}_{k}\|$$
(6.131c)

$$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \left(\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)}\right)^* = \begin{bmatrix} \cos\frac{\zeta_k}{2} \\ -\frac{\zeta_k}{\zeta_k}\sin\frac{\zeta_k}{2} \end{bmatrix}$$
(6.131d)

$$\boldsymbol{\zeta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{in}^{n}(t) dt = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \left[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}(t) \right] dt, \quad \boldsymbol{\zeta}_{k} = \|\boldsymbol{\zeta}_{k}\|$$
(6.131e)

值得注意的是,与方向余弦矩阵递推公式(6.56a)和式(6.56b)相似,式(6.131b)、式(6.131d)成 立的前提是在积分时段 [t_{k-1},t_k] 满足定轴转动条件。

6.2.4 等效旋转矢量

当载体运动不满足定轴转动条件时,将陀螺输出的角增量代入式(6.56b)更新姿态 矩阵或代入式(6.130b)更新姿态四元数会引入不可交换误差。如6.2.2.4小节所述,减小 或消除不可交换误差的有效途径是使用等效旋转矢量。本节首先解释转动不可交换性 与惯导姿态算法的关联性,然后介绍等效旋转矢量的基本概念和使用方法,推导等效旋 转矢量的微分方程以建立其时间导数与角速度的函数关系,最后给出针对实际工程应 用的等效旋转矢量微分方程的求解公式。

²¹考虑 n 系和 b 系的变化时,默认以惯性坐标系为参考,但式中没有明确写出惯性坐标系。

6.2.4.1 转动的不可交换性

从经典力学[41]可知, 刚体 (或与刚体固连的坐标系)的有限转动是不可交换的。如 图 6.9所示, 如果刚体先绕 x 轴转动 90°, 再绕 y 轴转动 90°, 和先绕 y 轴转动 90°, 再 绕 x 轴转动 90°, 两种情形下刚体在空间中的最终姿态显然是不一样的。这就是转动的 不可交换性, 即有限转动之和与转动次序有关。转动不是向量, 两次或两次以上不同轴 的转动不能相加。两次转动的结果与姿态矩阵的乘积是对应的,转动的不可交换性等价 于姿态矩阵乘法不满足交换律, 可参考本章6.2.2.5小节的解释。



图 6.9 刚体连续转动的不可交换性示意图

从姿态矩阵乘积的角度进一步解释转动的不可交换误差: 假设有参考坐标系 R 和 动坐标系 b, 第一种情形下, b 系相对于 R 系按 "ZYX"的转轴顺序转动 3 个角度 ψ , θ 和 ϕ 后变换到新的位置。第二种情形下, b 系相对于 R 系按 "XYZ"的转轴顺序转 动 3 个同样大小的角度 ϕ , θ 和 ψ 。根据6.2.1.3小节的方法, 写出两种情况下对应的坐 标变换矩阵 $\mathbf{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{b}}$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{b}}(\mathrm{ZYX}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$(6.132)$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{b}}(\mathrm{XYZ}) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\psi c\phi + s\theta s\phi c\psi & s\psi s\phi - s\theta c\phi c\psi\\ -c\theta s\psi & c\psi c\phi - s\theta s\phi s\psi & c\psi s\phi + s\theta c\phi s\psi\\ s\theta & -c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$
(6.133)

很明显 $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{ZYX}) \neq \mathbf{C}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{XYZ})$ 。但是,当转角 ϕ 、 θ 和 ψ 都是一阶小量的小角度时,则 cos x ~ 1, sin x ~ x, (x = ϕ , θ , ψ)。在忽略二阶小量或取极限的情况下,有

$$\mathbf{C}_{n}^{b}(ZYX) = \mathbf{C}_{n}^{b}(XYZ) \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix}$$
(6.134)

可见**小角度的转动是可交换顺序的**。从转动的不可交换性可得出以下推论:对方向 随时间变化的角速度向量积分,与对应刚体的有限转动过程是不一致的,积分结果没有 明确物理含义[42]。因为对角速度的数值积分

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{\rm Rb}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega}_{\rm Rb}^{\rm b}(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad (6.135)$$

是一个随时间的累加过程,相当于通过向量加法(积分)来描述转动的相加。若积分时 段内角速度 ω_{Rb}^{b} 方向不变,即载体定轴转动时,积分结果与载体的连续转动过程确实 是一致的;若 ω_{Rb}^{b} 方向发生变化,积分结果与载体的连续转动过程则不一致,积分过 程引入了转动不可交换误差。

在求解方向余弦矩阵和姿态四元数微分方程时,都涉及对角速度向量的积分,虽 然每次积分的时长很短,但不可交换误差随时间累积后不能一直看作一阶小量。本 章6.2.2.4小节末尾讨论了减小"不可交换误差"影响的最有效途径是:根据陀螺多个 历元的角增量测量值,构造出一个在积分时段内方向不变的"等效旋转矢量",理论上 可完全消除"不可交换误差"对姿态更新的影响。

6.2.4.2 等效旋转矢量的基本概念

刚体运动的欧拉定理指出"刚体的定点有限次旋转等价于绕经过该点的某个轴的 一次转动"。等效旋转矢量的概念在本章6.2.3.3小节已是呼之欲出。如图 6.7所示,任意 坐标系 R 通过 3 次(即有限次)旋转后与 b 系对齐,根据欧拉定理,总可以找到一个 旋转轴,定义轴上的单位向量 \mathbf{u}_{Rb} ,让 R 绕 \mathbf{u}_{Rb} 转动一个角度 ϕ_{Rb} 后与 b 系重合。因 此,基于一个转轴 \mathbf{u}_{Rb} 和一个转动角度 ϕ_{Rb} 可以简洁而完整地描述 b 系相对于 R 系的 姿态, \mathbf{u}_{Rb} 与 ϕ_{Rb} 的乘积称作**等效旋转矢量** (equivalent rotation vector),有些文献也 称之为轴角 (axis-angle),记作

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}} = \phi_{\mathrm{Rb}} \mathbf{u}_{\mathrm{Rb}}, \quad \phi_{\mathrm{Rb}} = \|\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}\|, \quad \mathbf{u}_{\mathrm{Rb}} = \frac{\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}}{\phi_{\mathrm{Rb}}}$$
(6.136)

6.2 姿态算法

等效旋转矢量 ϕ_{Rb} 用一个"三维向量"表示了 b 系相对于 R 系的姿态,其模值 表示转角大小,其方向表示转轴的正方向,本书明确写出等效旋转矢量对应的两个坐标 系,约定如下: ϕ_{Rb} 的含义描述为 R 绕 ϕ 的正方向转动一个角度 ϕ_{Rb} 后与 b 系重合。

从转动的物理含义上看, $(\phi_{Rb} \pm 2k\pi)\mathbf{u}_{Rb}$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 表示相同的转动, 如果 将转角的取值范围限定在 $0 \le \phi_{Rb} \le 2\pi$, 则等效旋转矢量与姿态矩阵——对应。等效 旋转矢量可通过罗德里格斯 (Rodrigues) 公式转换为方向余弦矩阵, 证明过程可查阅 参考文献[12, p.12]:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \mathbf{I}_{3} + \frac{\sin \phi_{\mathrm{Rb}}}{\phi_{\mathrm{Rb}}} \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}} \times \right) + \frac{1 - \cos \phi_{\mathrm{Rb}}}{\phi_{\mathrm{Rb}}^{2}} \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}} \times \right)^{2}$$
(6.137)

式(6.137)可写作等价形式:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \mathbf{I}_{3} + \sin \phi_{\mathrm{Rb}} \left(\mathbf{u}_{\mathrm{Rb}} \times \right) + \left(1 - \cos \phi_{\mathrm{Rb}} \right) \left(\mathbf{u}_{\mathrm{Rb}} \times \right)^{2}$$
(6.138)

等式(6.137)两边右乘向量 ϕ_{Rb}^{b} ,并考虑向量叉乘的性质 $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times)\mathbf{v} = \mathbf{0}$,得

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}} = \mathbf{I}_{3}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}} + \frac{\sin\phi_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}}{\phi_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}} \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}\times\right)\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}} + \frac{1-\cos\phi_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}}{\left(\phi_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}\right)^{2}} \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}\times\right) \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}\times\right)\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}}$$

$$(6.139)$$

即

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}^{\mathrm{b}} \tag{6.140}$$

式(6.140)表明,等效旋转矢量 ϕ_{Rb} 在 b 系和 R 系下的坐标值完全相等,这是与其物理含义相符的一个特性。因此,一般不明确写出其右上标的投影坐标系。将方向余弦 矩阵 \mathbf{C}_{b}^{R} 看作等效旋转矢量 ϕ_{Rb} 的函数

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \mathbf{M}_{\mathrm{RV}}\left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}\right) \tag{6.141}$$

容易验证,等效旋转矢量反号后代入函数 M_{RV} 则为投影变换的逆运算,因为等效 旋转矢量反号表示沿相反的方向转动相同角度,是反转过程。因而,有

$$\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{b}} = (\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}})^{\top} = \mathbf{M}_{\mathrm{RV}} \left(-\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}\right)$$
(6.142)

根据姿态四元数的定义式(6.102),等效旋转矢量 $\phi_{\rm Rb}$ 可转换为姿态四元数 $\mathbf{q}_{\rm b}^{\rm R}$:

$$\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \cos\frac{\phi_{\mathrm{Rb}}}{2} + \frac{\sin\left(\phi_{\mathrm{Rb}}/2\right)}{\phi_{\mathrm{Rb}}}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{Rb}}$$
(6.143)

等效旋转矢量除了能有效补偿姿态积分中的转动不可交换误差外,还是本书介绍 的**四种姿态表达式中唯一可以对旋转过程进行线性内插的方法**,在姿态插值中非常有 用。例如,组合导航经常需要求解惯导在两个采样时刻之间某个时刻的姿态,通过以下 公式求解在 [0, *t*] 之间时刻点 kt 的姿态或姿态变化:

$$\phi_{\mathbf{b}(0)\mathbf{b}(\mathbf{kt})} = \mathbf{k}\phi_{\mathbf{b}(0)\mathbf{b}(\mathbf{t})}, \quad \mathbf{k} \in [0, 1]$$
(6.144)

需要特别注意的是:**不共线的两个等效旋转矢量(对应于两次转动)也不能相加来 表示转动的叠加,即具有不可交换性**。等效旋转矢量一般只用于表示两个采样时刻的姿态变化,然后将其转换为对应的方向余弦矩阵或四元数,再"叠加"到前一时刻的姿态上,进行姿态的更新;然后在下一历元重新计算姿态变化对应的等效旋转矢量,进行姿态更新,如此循环递推,这将在本章6.2.4.4小节介绍。在小角度近似时,等效旋转矢量 与欧拉角是一样的。

6.2.4.3 等效旋转矢量的微分方程

本节推导等效旋转矢量的微分方程,对推导过程不感兴趣的读者可跳至本节末尾的方程(6.161)。按6.2.3.3小节的符号约定,b系相对于 R 系的姿态四元数记作 **q**_b^R:

$$\mathbf{q}_{\rm b}^{\rm R} = \cos\frac{\phi_{\rm Rb}}{2} + \frac{\phi_{\rm Rb}}{\phi_{\rm Rb}}\sin\frac{\phi_{\rm Rb}}{2} \tag{6.145}$$

式中, $\phi_{\text{Rb}} = \| \boldsymbol{\phi}_{\text{Rb}} \|$ 为等效旋转矢量的模值,即转动角度值。在接下来的推导中,为书 写方便,将 $\mathbf{q}_{\text{b}}^{\text{R}}, \boldsymbol{\omega}_{\text{Rb}}^{\text{b}}$ 和 $\boldsymbol{\phi}_{\text{Rb}}$ 简记为 $\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\phi}_{\text{o}}$ 将式(6.145)记作

$$\mathbf{q} = f_1 + f_2 \boldsymbol{\phi}, \quad f_1 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad f_2 = \frac{1}{\phi} \sin \frac{\phi}{2}$$
 (6.146)

根据四元数的微分方程(6.120),有

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \circ \boldsymbol{\omega} \tag{6.147}$$

式中, ω 应看作纯虚四元数。将式(6.146)代入上式, 应用四元数乘法运算法则(6.81), 有

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{f}_1 \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{f}_2 \boldsymbol{\phi} \circ \boldsymbol{\omega}$$
(6.148)

根据式(6.81),有

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{f}_1 \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{f}_2 (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\omega})$$
(6.149)

对式(6.146)中各式等号两边求导,可得

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{f}}_1 + \dot{\mathbf{f}}_2 \boldsymbol{\phi} + \mathbf{f}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \tag{6.150a}$$

$$\dot{f}_1 = -\frac{1}{2} \left(\sin \frac{\phi}{2} \right) \dot{\phi} = -\frac{1}{2} \phi \dot{\phi} f_2$$
 (6.150b)

$$\dot{f}_{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\phi}{2} \right) \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \left(\sin \frac{\phi}{2} \right) \frac{\dot{\phi}}{\phi^{2}} = \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(\frac{1}{2} f_{1} - f_{2} \right)$$
(6.150c)

将式(6.150b)和式(6.150c)代入式(6.150a),可得

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2}\phi\dot{\phi}\mathbf{f}_2 + \frac{\phi}{\phi}\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\right)\boldsymbol{\phi} + \mathbf{f}_2\dot{\boldsymbol{\phi}}$$
(6.151)

式(6.149)与式(6.151)的等号右边相等

$$\frac{1}{2}\mathbf{f}_{1}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\mathbf{f}_{2}(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\phi}^{\top}\boldsymbol{\omega}) = -\frac{1}{2}\phi\dot{\phi}\mathbf{f}_{2} + \frac{\dot{\phi}}{\phi}(\frac{1}{2}\mathbf{f}_{1} - \mathbf{f}_{2})\boldsymbol{\phi} + \mathbf{f}_{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}$$
(6.152)

整理,可得

$$\frac{1}{2}\mathbf{f}_{1}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\mathbf{f}_{2}(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\phi}^{\top}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\phi\dot{\phi}\mathbf{f}_{2} - \frac{\dot{\phi}}{\phi}(\frac{1}{2}\mathbf{f}_{1} - \mathbf{f}_{2})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}$$
(6.153)

上式等号两边除以系数 f2, 整理可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_2} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{\dot{\boldsymbol{\phi}}}{\phi} (\frac{1}{2} \frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_2} - 1) \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2} \phi \dot{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\omega}$$
(6.154)

向量 ϕ 的导数必然还是向量,所以式(6.154)等号右边最后两项标量应等于 0,即

$$\phi \dot{\phi} = \boldsymbol{\phi}^{\top} \boldsymbol{\omega} \tag{6.155}$$

式(6.155)等号两边除以 ϕ^2 , 可得

$$\dot{\overline{\phi}}_{\phi} = \frac{1}{\phi^2} \phi^{\top} \boldsymbol{\omega}$$
(6.156)

将式(6.156)代入式(6.154),得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_2} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_2} - 1\right) (\boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\phi}$$
(6.157)

根据向量的三重积公式(2.21),易得

$$(\boldsymbol{\phi}^{\top}\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\phi}^{\top}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}) + \phi^{2}\boldsymbol{\omega}$$
(6.158)

将式(6.158)代入式(6.157),整理可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_2}\right) \boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega})$$
(6.159)

根据式(6.146),易得

$$1 - \frac{1}{2} \frac{f_1}{f_2} = 1 - \frac{\phi \sin \phi}{2(1 - \cos \phi)}$$
(6.160)

将式(6.160)代入(6.159),可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\phi^2} \left[1 - \frac{\phi \sin \phi}{2(1 - \cos \phi)} \right] \boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega})$$
(6.161)

通过三角函数变换,式(6.161)可变换为等价形式:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \frac{2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{2\sin^2\frac{\phi}{2}} \right) \boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega})$$

$$= \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2} \right) \boldsymbol{\phi} \times (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega})$$
(6.162)

式(6.161)即常用的等效旋转矢量的微分方程,该公式最早由 John E. Bortz 于 1969 年在他的博士论文中推导得到,并于 1971 年正式发表[42],后来被称为 Bortz 方程, 它是利用等效旋转矢量进行转动不可交换误差补偿的数学理论基础。Bortz 方程等号右 边第一项 ω 表示角速度向量,第二项 $\phi \times \omega$ 的向量方向沿 ω 轨迹线的切线方向,第三 项 $\phi \times (\phi \times \omega)$ 的向量方向则为 ω 轨迹线的法线方向,如图 6.10所示。因此,使用等 效旋转矢量相当于补偿了积分时段内角速度向量的方向变化。



图 6.10 Bortz 方程中的向量

6.2.4.4 等效旋转矢量微分方程求解

Bortz 方程(6.161)虽然在理论上是严格成立的,但是求解该非线性微分方程的过程 非常复杂。当等效转动角度 $\phi = \|\phi\|$ 为小角度时,工程应用中通常作近似处理。

近似处理 1:式(6.161)等号右边第三项是关于 ϕ 的二阶小量,忽略其影响,得

$$\dot{\phi} \approx \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega$$
 (6.163)

近似处理 2:式(6.163)等号右边还包含待求量 ϕ ,进一步近似为

$$\dot{\phi}(t) \approx \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)$$
 (6.164)

式中

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau , \ t \in [t_{k-1}, \ t_k]$$
(6.165)

式(6.164)右边不再包含待求变量 ϕ ,方便求解。需要特别指出的是,只有在 ϕ (t) 始 终为小量时才能做近似处理 2, ϕ (t) 越小,式(6.164)相对于式(6.163)的近似误差越小。 接下来讨论近似处理 2 的合理性,不感兴趣的读者可跳至式(6.169)。

式(6.163)是时变系数微分方程,可借鉴6.2.2.4小节方向余弦矩阵微分方程求解的思路,用毕卡迭代法求解。对等式(6.163)两边同时在时间段 [t_{k-1}, t] 内积分,得

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t} \left[\boldsymbol{\omega}(\tau) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau) \right] d\tau, t \in [t_{k-1}, t_k]$$
(6.166)

等效旋转矢量 ϕ 在这里用于表示两个相邻历元之间的姿态变化,所以 $\phi(t_{k-1}) = 0$,

将式(6.165)代入式(6.166),可得

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\phi}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau$$
$$= \Delta \boldsymbol{\theta}(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\phi}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau$$
(6.167)

式(6.167)等号右边积分号内仍含有待求变量 $\phi(t)$,所以按迭代积分的思路,将上式等号右边整体代入其积分号内,替换 $\phi(t)$,得

$$\begin{split} \boldsymbol{\phi}(t) &= \Delta \boldsymbol{\theta}(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(\tau) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{\tau} \boldsymbol{\phi}(\tau_{1}) \times \boldsymbol{\omega}(\tau_{1}) d\tau_{1} \right] \times \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \\ &= \Delta \boldsymbol{\theta}(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t} \Delta \boldsymbol{\theta}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{4} \int_{t_{k-1}}^{t} \left(\int_{t_{k-1}}^{\tau} \boldsymbol{\phi}(\tau_{1}) \times \boldsymbol{\omega}(\tau_{1}) d\tau_{1} \right) \times \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \end{split}$$
(6.168)

在时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内,如果 $\phi(\tau_1)$ 为小量,且积分时长很短,则式(6.168)等号右边第 三项远小于第二项[12, p.28],故简化如下:

$$\boldsymbol{\phi}(t) \approx \Delta \boldsymbol{\theta}(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t} \Delta \boldsymbol{\theta}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau = \Delta \boldsymbol{\theta}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t)$$
(6.169)

式中,记

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t} \Delta \boldsymbol{\theta}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \qquad (6.170)$$

 $\sigma(t) = \phi(t) - \Delta \theta(t)$ 表示等效旋转矢量 $\phi(t)$ 与角增量 $\Delta \theta(t)$ 之间的差异,通常称 作**转动不可交换误差的修正量**。由于前面对 Bortz 方程做了近似处理 1 和近似处理 2, $\sigma(t)$ 也是对不可交换误差的近似修正:近似处理 1 忽略了载体角速度向量 ω 轨迹的法 向方向变化,近似处理 2 则仅对 ω 切向的方向变化做了近似补偿。对式(6.169)等号两 边同时求导,即得式(6.164)。近似处理 2 的合理性讨论完毕。

将式(6.169)等号右边积分项的积分上限 t 改为 t_k ,等效旋转矢量记为 ϕ_k ,有

$$\boldsymbol{\phi}_{k} \triangleq \boldsymbol{\phi}(t_{k}) = \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) dt$$
 (6.171a)

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \Delta \boldsymbol{\theta} \left(t_{k} \right) = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}(t) dt \qquad (6.171b)$$

根据式(6.171a)求解等效旋转矢量 ϕ_k 需要角增量 $\Delta \theta(t)$ 和载体相对参考系的角速 度向量 $\omega(t)$ 在时间段 $[t_{k-1}, t_k]$ 的数学表达式。然而, IMU 只能在离散的采样时刻点 t_{k-1} 和 t_k 测量瞬时角速度或角增量,中间的过程信息在采样中已经损失了。因此,需 要对 $\omega(t)$ 在时间段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内的函数做合理假设,用特定的数学模型近似描述载体的 真实角运动,以便求出上述积分表达式。通常假设角速度为常值或随时间线性变化,接 下来推导这两种假设下根据角增量测量值求解等效旋转矢量 ϕ_k 的计算式。

姿态单子样算法

假设在积分时间段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内,角速度向量 $\omega(t)$ 为常向量 c (即方向和大小都保持不变),即

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{c} \tag{6.172}$$

在此假设条件下,角增量 $\Delta \theta(t)$ 与角速度向量 $\omega(t)$ 方向相同,有

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0} \tag{6.173}$$

将式(6.173)代入式(6.171a),得

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k}} = \Delta \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}} \tag{6.174}$$

此时,根据一个历元的角增量测量值 $\Delta \theta_k$ 即可求解等效旋转矢量,故称作姿态的 单子样算法。等效旋转矢量 ϕ_k 退化为角增量 $\Delta \theta_k$,因为假设角速度向量 $\omega(t)$ 为常向 量,意味着载体在姿态更新时段内做定轴转动,不可交换误差为零。

姿态双子样算法

如图6.11所示,假设在积分时段 [t_{k-2}, t_k] 内角速度向量 $\omega(t)$ 随时间线性变化

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}(t - t_{k-1}) \tag{6.175}$$

式中, a 和 b 为未知的常值三维向量。



图 6.11 角速度双子样假设示意图

式(6.175)中共有 6 个待求参数。因此,需要根据前一历元和当前历元的角增量测量 值 $\Delta \theta_{k-1}$ 和 $\Delta \theta_k$ 才能求解 a 和 b,为此不得不把式(6.175)的角速度线性假设扩展到时 间段 $[t_{k-2}, t_k]$ 内。根据角增量的定义式,有

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau = \mathbf{a} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{b} \Delta t^{2}$$
(6.176a)

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau = \mathbf{a} \Delta t - \frac{1}{2} \mathbf{b} \Delta t^2$$
(6.176b)

在积分区间内任意时刻的角增量为

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau = \int_{t_{k-1}}^{t} \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau$$

= $\mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}(t - t_{k-1})^2$ (6.176c)

式中, Δt 为角增量测量值的采样时间间隔,假设是等间隔采样,即 $\Delta t = t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1}$,根据式(6.176a)和式(6.176b),可解得

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \Delta \boldsymbol{\theta}_k}{2\Delta t}, \quad \mathbf{b} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_k - \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}}{\Delta t^2}$$
(6.177)

将式 (6.175) 和式 (6.176c) 代入式(6.171a),根据第2章2.1.3.2小节三维向量叉乘运算,有 $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,整理可得:

$$\begin{split} \boldsymbol{\phi}_{k} &= \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \left(\left[\mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{b}(t - t_{k-1})^{2} \right] \times \left[\mathbf{a} + \mathbf{b}(t - t_{k-1}) \right] \right) dt \\ &= \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} + \frac{1}{4} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \left[\mathbf{a} \times \mathbf{b}(t - t_{k-1})^{2} \right] dt \\ &= \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} + \frac{1}{12} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \Delta t^{3} \end{split}$$
(6.178)

将式 (6.177) 中系数 a 和 b 的值代入式(6.178), 整理得

$$\phi_{k} = \Delta \theta_{k} + \frac{1}{12} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \Delta t^{3}$$

$$= \Delta \theta_{k} + \frac{1}{24} (\Delta \theta_{k-1} + \Delta \theta_{k}) \times (\Delta \theta_{k} - \Delta \theta_{k-1})$$

$$= \Delta \theta_{k} + \frac{1}{12} \Delta \theta_{k-1} \times \Delta \theta_{k}$$
(6.179)

等式(6.179)右边第二项是姿态更新算法的双子样不可交换误差补偿项。该叉积项在载体做圆锥运动时会产生显著姿态误差累积,常称为圆锥效应补偿项,详细解释可查阅 参考文献[12]第 2.6 节。

值得注意的是,等效旋转矢量的双子样算法存在另一种等价实现方式:假设角速度 向量 ω (t) 在时间段 [t_{k-1} , t_k](与本书的 [t_{k-2} , t_k]不同)内线性变化,为了求解系数 **a** 和 **b**,需要在 [t_{k-1} , t_k] 区间的中间时刻增加一次 IMU 角增量采样,详见参考文献[12, p.29-31]。此方法要求 IMU 的数据采集频率为导航解算频率的 2 倍。例如,若 INS 以 200 Hz 的频率更新姿态,则 IMU 的原始数据频率需达到 400 Hz。该方式与本书双子 样算法的区别体现在线性模型(6.175)应用的时段长度不同,二者求得的等效旋转矢量 表达式不同,但精度相当。

6.2.5 n 系下的姿态更新算法示例

接下来给出一套完整的 *n* 系下姿态更新的常用算法: 已知前一时刻 t_{k-1} 的姿态 (不 妨表示为姿态四元数形式 $\mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \triangleq \mathbf{q}_{b}^{n}(t_{k-1})$) 和陀螺角增量测量值 $\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}, \Delta \boldsymbol{\theta}_{k},$ 计算 当前时刻的姿态 $\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)}$ 。 当前时刻的姿态四元数可通过四元数的链乘运算得到22:

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \circ \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \circ \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$
(6.180a)

式中, $\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$ 表示 b 系姿态变化对应的四元数

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \| 0.5 \boldsymbol{\phi}_{k} \| \\ \frac{\sin \| 0.5 \boldsymbol{\phi}_{k} \|}{\| 0.5 \boldsymbol{\phi}_{k} \|} \end{bmatrix}$$
(6.180b)

式中, $\phi_k = \phi_{b(k-1)b(k)}$ 表示 b 系相对 i 系转动的等效旋转矢量, $\|\phi_k\|$ 为 ϕ_k 的模值。 ϕ_k 采用双子样计算式(6.179)

$$\boldsymbol{\phi}_{k} = \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} + \frac{1}{12} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_{k}$$
(6.180c)

式中, $\Delta \theta_{k-1}$ 和 $\Delta \theta_k$ 分别为 t_{k-1} 和 t_k 时刻的陀螺角增量输出

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) dt, \quad \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) dt$$
(6.180d)

 $\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 表示 n 系相对于 i 系姿态变化对应的四元数

$$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos \| 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{k} \| \\ -\frac{\sin \| 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{k} \|}{\| 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{k} \|} 0.5 \boldsymbol{\zeta}_{k} \end{bmatrix}$$
(6.180e)

式中, $\zeta_k = \zeta_{n(k-1)n(k)}$ 为 n 系相对 i 系转动的等效旋转矢量,理解为 n 系从 t_{k-1} 时刻的状态 (记作 n (k - 1)),绕向量 ζ_k 转动角度 $\|\zeta_k\|$ 后到达 t_k 时刻的状态 (即 n (k))。

$$\boldsymbol{\zeta}_{k} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{in}^{n}(t) dt \qquad (6.180f)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n} = \boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} + \boldsymbol{\omega}_{\rm en}^{\rm n} \tag{6.180g}$$

容易验证,在积分时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内,地球自转角速度向量 $\omega_{ie}^n(t)$ 和位移角速度向 量 $\omega_{en}^n(t)$ 的方向变化非常小,可近似处理

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \left[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}(t) \right] dt \\ &\approx \left[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(t_{k-1/2}) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}(t_{k-1/2}) \right] (t_{k} - t_{k-1}) \end{aligned}$$
(6.180h)

²²请注意,从 t_{k-1} 到 t_k 时刻过程中 b 系和 n 系的姿态变化都是相对于惯性系(i 系)来说的,因此 n 系才有所谓姿态变化(尽管非常微小);而 b 系的姿态变化可以用陀螺输出的载体相对于惯性系的角增 量来解算,见式(6.180b)。当然还有另一种选择,就是以 n 系为参照,那么 n 系本身的姿态变化就是零;但此时解算 b 系的姿态变化时就不能直接用陀螺输出的角增量,而必须扣掉其中 n 系相对于 i 系旋转的 那部分角增量。两种处理方法在本质上是等价的。

式中, $\omega_{ie}^{n}(t_{k-1/2})$ 和 $\omega_{en}^{n}(t_{k-1/2})$ 表示中间时刻 $t_{k-1/2}$ 的地球自转角速度和位移角速度, 可通过对 t_{k-1} 和 t_{k} 的计算值取平均得到。 ω_{ie}^{n} 和 ω_{en}^{n} 的表达式重写如下:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \begin{bmatrix} \omega_{e} \cos \varphi & 0 & -\omega_{e} \sin \varphi \end{bmatrix}^{\top}$$
(6.180i)

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} v_{E}/(R_{N} + h) \\ -v_{N}/(R_{M} + h) \\ -v_{E} \tan \varphi/(R_{N} + h) \end{bmatrix}$$
(6.180j)

式中, φ 为载体所在位置的纬度, ω_e 为地球自转角速率(见表2.1), v_E , v_N 分别为载体速度东向和北向分量。 R_M 和 R_N 分别为子午圈半径和卯酉圈半径,见式(2.75)和式(2.76)。最后,随着递推步数的增加,误差不断累积使得求解的姿态四元数不再是单位四元数,需要定期做规范化处理,见本6.2.3.2小节。

载体姿态也可以用方向余弦矩阵表示,当前时刻的方向余弦矩阵可通过其链乘运 算求得

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$$
(6.181)

其中, b 系和 n 系的变化矩阵 $C_{b(k)}^{b(k-1)}$ 和 $C_{n(k-1)}^{n(k)}$ 计算如下:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}(\mathrm{k})}^{\mathrm{b}(\mathrm{k}-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \|\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{k}}\|}{\|\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{k}}\|} \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{k}}\times\right) + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{k}}\|}{\|\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{k}}\|^{2}} \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{k}}\times\right) \left(\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{k}}\times\right)$$
(6.182)

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} = \mathbf{I} - \frac{\sin \|\boldsymbol{\zeta}_{k}\|}{\|\boldsymbol{\zeta}_{k}\|} \left(\boldsymbol{\zeta}_{k}\times\right) + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\zeta}_{k}\|}{\|\boldsymbol{\zeta}_{k}\|^{2}} \left(\boldsymbol{\zeta}_{k}\times\right) \left(\boldsymbol{\zeta}_{k}\times\right)$$
(6.183)

式中,等效旋转矢量 ϕ_k 和 ζ_k 的计算分别为式(6.180c)和式(6.180h)。

最后,需要定期对解算出的方向余弦矩阵做正交化处理,以避免多次递推计算后由 于数值计算误差而失去正交性。

注意,比较式(6.131b)和式(6.180b),两者虽然在形式上完全一样,但本质含义上存 在重要区别(比较式(6.57b)和式(6.182)也是如此):前者仅简单地使用角增量计算变化 四元数,理论上只适用于定轴旋转情形,若不满足该条件,则会引入不可交换误差;而 后者用角增量测量值构造出等效旋转矢量来补偿转动的不可交换误差,在非定轴转动 情况下精度更高,式(6.131b)只是式(6.180b)的单子样算法。转动的不可交换误差本质上 是对时变向量积分时不考虑其方向变化而导致的误差,在下一节的速度算法推导和更 新中也会遇到同样的问题,解决思路与此相似。

6.3 速度算法

载体的速度可用三维向量来表达,其微积分和递推计算可通过向量的运算法则来 实现。速度对时间求导得到速度微分方程,该方程描述了速度随时间的变化规律,并建 立了加速度计测量的比力和速度之间的函数关系。通过求解速度微分方程并进行离散 化处理,可得到速度的递推计算式。 对向量求导时,需要指定一个观察坐标系,即确定"在哪个坐标系下观察这个向量随时间的变化"。对于速度向量,可以在不同的观察坐标系下进行求导,包括地心地固坐标系(e系)、导航坐标系(n系)和惯性坐标系(i系)。选择哪个观察坐标系取决于具体的应用需求。不同坐标系没有绝对的优劣之分,但选择合适的观察坐标系可以使推导过程更加简洁和方便。例如,在地球表面附近的导航应用中,通常不选择在i系下进行速度解算,而是在 n 系下求解速度微分方程;而对于熟悉 GNSS 定位算法的读者来说,可能更倾向于选择 e 系。本节将推导不同坐标系下的速度微分方程,并以导航坐标系下速度微分方程求解为例,推导速度更新的递推计算式。

6.3.1 位置和速度向量的导数

对于地球附近空间的导航,载体的位置通常用地心位置向量(从地心指向载体)来 表达,记作 **r**_{eb},详见第2章2.3.2小节。当载体运动时,位置向量随时间而变化,位置关于 时间的导数即为速度。明确地定义速度需要指定一个观察坐标系,本书默认选择 e 系, 即关心载体相对于地球的速度,简称地速,记作

$$\mathbf{v}_{\rm eb} \triangleq \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\rm eb}}{\mathrm{d}t} \right|_{\rm e} \tag{6.184}$$

位置 reb 在惯性系下对时间的二阶导数为相对惯性空间的运动加速度,记作

$$\mathbf{a}_{ib} \triangleq \left. \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_{eb}}{\mathrm{d}t^2} \right|_i \tag{6.185}$$

回顾第3章3.2节加速度计输出(比力)的概念,惯性系下载体的运动加速度 **a**_{ib} 与 比力 **f** 和引力加速度 **g** 之间满足如下关系:

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t^2} \right|_{\mathrm{i}} = \mathbf{f} + \mathbf{g} \tag{6.186}$$

同一向量在不同坐标系下的时间导数通过哥氏方程(Coriolis equation)进行转换:

$$\left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{1}}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathrm{a}} = \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{1}}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ab}} \times \mathbf{v}_{1} \tag{6.187}$$

式中, \mathbf{v}_1 为任意三维向量, a 和 b 为两个不同的坐标系, $\boldsymbol{\omega}_{ab}$ 为 b 系相对于 a 系的转动角速度向量。若坐标系 a 和 b 之间不存在相对角运动,即 $\boldsymbol{\omega}_{ab} = \mathbf{0}$,则哥氏改正项 $\boldsymbol{\omega}_{ab} \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ 。

读者可通过以下示例来理解哥氏方程:设想一个载体静止于地面,在 e 系下观察,其位置向量保持不变,速度为零。然而,对于地心惯性坐标系下的观察者而言,载体随地球自转而移动,其速度为 $\omega_{ie} \times \mathbf{r}_{eb}$ 。如第1章1.4.1小节所述,牛顿运动定律仅适用于惯性坐标系。然而,地速定义式(6.184)中采用的观察坐标系(e 系)并非惯性系,哥氏方程(6.187)对于在地球等非惯性坐标系中描述物体的运动提供了必要的修正。

6.3.2 速度微分方程

接下来在 i 系、e 系和 n 系下对速度向量 v 求导,建立起与比力测量值之间的函数 关系,构建载体运动的力学方程。i 系是牛顿力学成立的坐标系,在该坐标系下载体运 动的力学方程最简单,因而首先推导 i 系下的地速微分方程,然后再推导在旋转坐标系 e 系和 n 系下的地速微分方程。

6.3.2.1 i 系速度微分方程

位置向量 reb 在 i 系和 e 系下对时间求导,由哥氏方程(6.187),可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{i} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{e} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{eb}}$$

$$= \mathbf{v}_{\mathrm{eb}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{eb}}$$
(6.188)

式中, ω_{ie} 为 e 系相对于 i 系的转动角速度向量,即地球自转角速度向量。等式两边各项都是三维向量,继续在 i 系下对时间求导,根据向量求导公式(2.44d)和(2.44f),可得

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\mathbf{r}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t^{2}}\Big|_{i} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{eb}}\right)\Big|_{i} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{i} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{i} \times \mathbf{r}_{\mathrm{eb}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{i}$$
(6.189)

如第2章2.3.1.3小节所述,在 i 系下观察,地球自转角速度向量 ω_{ie} 是常向量,即

$$\left. \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{i}} = \mathbf{0} \tag{6.190}$$

将式(6.190)代入式(6.189),可得

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\mathbf{r}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t^{2}}\Big|_{\mathrm{i}} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{i}}$$
(6.191)

将式 (6.186) 和式 (6.188) 代入式 (6.191), 整理可得

$$\left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{i}} = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}} + \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{eb}})$$
(6.192)

根据地球重力加速度公式(2.80),式中 $\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_{eb})$ 为重力加速度向量,记 作 \mathbf{g}_{p} ,代入式(6.192),得

$$\left. \frac{\mathrm{d} \mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{i}} = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}} + \mathbf{g}_{\mathrm{p}}$$
(6.193)

式(6.193)即为惯性坐标系下的地速微分方程。
6.3.2.2 e 系速度微分方程

根据哥氏方程(6.187),可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ei}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}}$$
(6.194)

根据角速度的含义,调换其两个右下标的顺序,则反号,即 $\omega_{ie} = -\omega_{ei}$,代入式(6.194),得

$$\left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{e}} = \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{i}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}}$$
(6.195)

将式 (6.193) 代入式(6.195), 可得 e 系下的地速微分方程

$$\left. \frac{\mathrm{d} \mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{e}} = \mathbf{f} - 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}} + \mathbf{g}_{\mathrm{p}}$$
(6.196)

6.3.2.3 n 系速度微分方程

根据哥氏方程(6.187),可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ne}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}}
= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}}$$
(6.197)

式中, ω_{en} 为位移角速度向量, 详见第2章2.2.3小节。将式 (6.196) 代入式 (6.197), 整理 可得 n 系下的地速微分方程

$$\left. \frac{\mathrm{d} \mathbf{v}_{\mathrm{eb}}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{n}} = \mathbf{f} - (2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}) \times \mathbf{v}_{\mathrm{eb}} + \mathbf{g}_{\mathrm{p}}$$
(6.198)

式(6.198)等号两边都是三维向量,可统一指定投影坐标系为n系,则写作

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^{n} = \mathbf{f}^{n} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) \times \mathbf{v}_{eb}^{n} + \mathbf{g}_{p}^{n}$$
(6.199)

式中, $\dot{\mathbf{v}}_{eb}^{n} \triangleq \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{eb}}{\mathrm{dt}}\Big|_{n}^{n}$ 。

式(6.199)是 n 系下惯性导航解算的基本方程,式中各项的含义解释如下: $\dot{\mathbf{v}}_{eb}^{n}$ 是计算 载体速度和位置等导航参数所关心的运动加速度向量,又称几何运动加速度; $-2\omega_{ie} \times \mathbf{v}_{eb}$ 是由于地球自转和载体运动引起的哥氏加速度; $\omega_{en} \times \mathbf{v}_{eb}$ 是载体运动引起的对地向心 加速度; $-(2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times \mathbf{v}_{eb} + \mathbf{g}_{p}$ 统称为有害加速度。方程(6.199)表明,只有在加速度 计输出的比力中扣除有害加速度后,才能获得几何运动加速度。

有害加速度本质上是由于描述载体速度和加速度时选择非惯性坐标系为参考而导致的加速度修正。从力学的角度看,在非惯性参考系下做力学分析,需要对牛顿运动方程进行修正。在惯性坐标系下载体的运动方程即式(1.1),重写如下:

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}\mathbf{a}_{ib} \tag{6.200}$$

在 n 系下的观察者看来,载体似乎在有效力 \mathbf{F}_{eff} 作用下运动:

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F} - m(2\boldsymbol{\omega}_{\text{ie}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{en}}) \times \mathbf{v}_{\text{eb}} + m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega}_{\text{ie}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ie}} \times \mathbf{r}_{\text{eb}})$$
(6.201)

式中 mg 是地球万有引力。-m $\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}_{eb})$ 是地球自转导致的离心力,它与万有引 力之和为地球重力。更进一步,由于地球表面是曲面,载体运动发生位移后会出现位移 角速度,与之对应的还有对地离心力 -m $\omega_{en} \times \mathbf{v}_{eb}$;当载体运动时,还需要改正哥氏力 (Coriolis force)即 -2m $\omega_{ie} \times \mathbf{v}_{eb}$ 。这些"作用力"都是由于地球引力场及引入旋转坐标 系为参考所带来的,其中离心力、向心力和哥氏力都是虚拟的力,纯粹是因为观察者站 在旋转坐标系中观察所导致的。

下面通过一个简单的圆盘实验解释哥氏力和哥氏加速度,以帮助初学者理解。如 图6.12所示,在惯性空间(不存在引力场和其他外力作用)中,设有一个旋转的圆盘,其 转动角速度向量垂直纸面向外。在圆盘上,有一小球从旋转中心沿半径 OC 方向运动, 小球与圆盘之间不存在任何相互作用力,因此圆盘的旋转对小球的运动轨迹不产生任 何影响。在初始时刻(图6.12(a)), OC 与圆盘边缘相交于点 B, 小球从旋转中心开始运 动。可以想象,圆盘外(惯性系)的观察者看到小球的运动轨迹显然是一条沿 OC 方向 的直线。然而,随着小球的运动,圆盘继续旋转,当小球到达圆盘边缘时,圆盘已经旋 转了一定的角度,此时 OC 与圆盘边缘的交点为图中的 B' 点 (图6.12(b))。对于圆盘中 的观察者而言,小球不仅有沿 OC 方向的速度,还会表现出一个垂直于 OC 方向、指向 运动路径右侧的速度分量,该速度分量与小球到旋转中心的距离成正比,即 $v = \omega r$ (v 为侧向速度, ω 为圆盘的瞬时角速度,r为小球到旋转中心的距离)。因此,圆盘上的观 察者看到小球沿一条向运动方向右侧弯曲的曲线运动(如图6.12(b)中虚线所示)。这种 弯曲轨迹表明小球受到了某种力的作用(否则小球应沿直线运动)。这一神秘的"力"即 哥氏力,大小为 $2m\omega v$,方向与图中 F 方向一致。实际上,从惯性系下观察,小球并未 受到任何作用力,旋转坐标系中的观察者所谓的哥氏力是一种伪力或虚拟的力。同理, 对于向心力和离心力也可以通过圆盘实验来形象地理解,它们也是伪力。圆盘实验的结 论推广到三维运动时,哥氏加速度的计算由数乘 $-2\omega v$ 改成向量的叉乘 $-2\omega \times \mathbf{v}$ 。



图 6.12 哥氏加速度效应示意图

哥氏力或哥氏加速度在日常生活中有着广泛的应用和体现。例如,在北半球的河流 中,水流在流动过程中会受到地球自转产生的哥氏力的影响,导致河流向右偏转,从而 更多地冲刷右岸。这一现象是哥氏力作用在流体运动中的直接结果。相反,在南半球, 由于地球自转方向的关系,河流在流动时会向左偏转,因此更多地冲刷左岸。这些地理 现象都可以通过哥氏力的原理来解释,它揭示了地球自转对地表流体运动轨迹的微妙 影响。

6.3.3 n 系速度更新算法

下面以 n 系下的速度微分方程求解为例, 推导速度的递推计算式。为书写方便, 将 速度向量 **v**_{eb} 简写为 **v**, 并写出式(6.199)中各项的时间变量参数:

$$\dot{\mathbf{v}}^{n}(t) = \mathbf{f}^{n}(t) - [2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}(t)] \times \mathbf{v}^{n}(t) + \mathbf{g}_{p}^{n}(t) = \mathbf{C}_{b}^{n}(t) \mathbf{f}^{b}(t) - [2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}(t)] \times \mathbf{v}^{n}(t) + \mathbf{g}_{p}^{n}(t)$$
(6.202)

上式等号两边同时在时间段 [t_{k-1}, t_k] 内积分,得

$$\mathbf{v}_{k}^{n} = \mathbf{v}_{k-1}^{n} + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n} + \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^{n}$$
(6.203a)

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n} \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{C}_{b}^{n}(t) \mathbf{f}^{b}(t) dt \qquad (6.203b)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^{n} \equiv \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \left[\mathbf{g}_{p}^{n}\left(t\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}\left(t\right) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\left(t\right)\right) \times \mathbf{v}^{n}\left(t\right) \right] dt$$
(6.203c)

式中,角标 k – 1 和 k 分别表示时刻 t_{k-1} 和 t_k, \mathbf{v}_{k-1}^{n} 和 \mathbf{v}_{k}^{n} 分别为前一时刻 t_{k-1} 和当前 时刻 t_k 的速度; $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n}$ 表示与比力测量值相关的速度变化量,称作比力积分项, $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^{n}$ 是与有害加速度相关的速度变化量,称作重力哥氏积分项。

重力哥氏积分项中位移角速度 ω_{en}^{n} 的计算需要当前时刻的速度(待求量),式(6.202)是 关于速度的非线性微分方程组,细心的读者可能意识到其求解过程可借鉴方向余弦矩 阵微分方程求解所使用的毕卡迭代法。然而,由于重力哥氏积分项在积分时段内向量大 小和方向的变化非常缓慢,采用近似处理后不再需要做精细的迭代。比力积分项虽然形 式上简单,但由于被积函数中的姿态和比力向量都可随时间快速显著变化,在积分和离 散化过程中需要做得非常精细,以免造成过大的离散化误差。接下来讨论式(6.203b)和 式(6.203c)的求解。

6.3.3.1 重力哥氏积分项

将重力哥氏积分项的被积函数记作

$$\mathbf{a}_{gc}(t) \triangleq \mathbf{g}_{p}^{n}(t) - \left[2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}(t) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}(t)\right] \times \mathbf{v}^{n}(t)$$
(6.204)

式中, **g**ⁿ_p 和 ω_{en}^{n} 通常随位置和速度的变化都是相对平缓和连续的,不会出现突然的剧 烈跳动。举例说明:惯导的数据率一般可达 200Hz,则速度递推更新一次的积分时长为

0.005s,以高速运动的战斗机为例,假设其飞行速度为 700m/s,则在积分时段内运动距 离为 3.5m。如此小的位移引起的导航系的旋转(影响 ω_{en}^{n})和重力加速度向量(模值和 方向)的变化都是非常小的,对于低速运行的载体则变化更小。因此,被积函数 $\mathbf{a}_{gc}(t)$ 可近似为随时间线性变化,积分式(6.203c)由曲线积分简化为梯形积分

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^{n} \approx \frac{1}{2} \left[\mathbf{a}_{gc}(t_{k-1}) + \mathbf{a}_{gc}(t_{k}) \right] \Delta t$$

= $\mathbf{a}_{gc}(t_{k-1/2}) \Delta t$ (6.205)

式中, $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, $t_{k-1/2}$ 为 t_{k-1} 和 t_k 的中间时刻。 $\mathbf{a}_{gc}(t_{k-1/2})$ 表示根据 $t_{k-1/2}$ 时刻的位置和速度计算的 \mathbf{a}_{gc} 。由于此时尚未求得 t_k 时刻的速度和位置等参数,所以需要通过外推的方式计算 $t_{k-1/2}$ 时刻的位置和速度,然后再代入式(6.204)中计算 $\mathbf{a}_{gc}(t_{k-1/2})$ 。位置和速度通常采用线性外推法计算:

$$\mathbf{x}_{k-1/2} = \mathbf{x}_{k-1} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-2} \right) = \frac{3}{2} \mathbf{x}_{k-1} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k-2}, \quad (\mathbf{x} = \mathbf{r}_{eb}, \mathbf{v}_{eb})$$
(6.206)

式中, \mathbf{x}_{k-1} 和 \mathbf{x}_{k-2} 均为已知量。可见 $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^{n}$ 的计算是比较简单的,简化处理后则没 必要对式(6.202)进行迭代求解。

6.3.3.2 比力积分项

在积分时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内载体的姿态,以及比力向量的模值和方向均可能随时间快速 变化,其精确数值求解算法比较繁琐,需要精细处理。根据姿态矩阵的链乘运算(6.57a), 将式(6.203b)中被积函数的 $C_h^n(t)$ 做链乘分解,可得:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n} = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)} \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^{b}(t) dt$$
(6.207)

由于积分时间很短,在此期间 n 系相对于惯性系的转动为小量,且变化缓慢,将其 近似为时间的线性函数,对应的姿态矩阵简化为

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)} \approx \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k-1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}_3 \right)$$
(6.208)

式中, $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k-1)} = \mathbf{I}_3$, 若姿态矩阵的上下角标相同,表示坐标变换的原坐标系与目标坐标 系一致,不作坐标转换。将式 (6.208) 代入 (6.207),并将常值矩阵写到积分号外,得

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^{b}(t) dt$$
(6.209)

式中, $\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}$ 为前一时刻的姿态矩阵, 是已知量。矩阵 $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 对应的等效旋转矢量记 作 $\zeta_{n(k-1)n(k)}$, 在积分区间内 n 的转动为小量,因此有

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \approx \mathbf{I} - (\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)} \times)$$
(6.210)

等效旋转矢量 $\zeta_{n(k-1)n(k)}$ 的计算参考式(6.180h),重写如下:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)} &= \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\left(t\right) dt = \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \left[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}\left(t\right) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\left(t\right)\right] dt \\ &\approx \left[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}\left(t_{k-1/2}\right) + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\left(t_{k-1/2}\right)\right] \Delta t \end{aligned}$$
(6.211)

式中, $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 。计算 $\omega_{ie}^n(t_{k-1/2})$ 和 $\omega_{en}^n(t_{k-1/2})$ 需要做速度和位置的外推,方 法与重力哥氏积分项处理相同,见式(6.206)。

将式(6.209)中的积分项记作

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^{b}(t) dt$$
(6.212)

 $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$ 称作 b 系比力积分项。将式(6.210)和式(6.212)代入式(6.209),则比力积分项可写作

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n} = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)} \times) \right] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$$
(6.213)

接下来推导 b 系比力积分项 $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$ 的计算式。

b 系比力积分项

与式(6.212)中姿态矩阵 $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}$ 对应的等效旋转矢量记作 $\phi_{b(k-1)b(t)}$,反映了 b 系相对于 i 系的转动。由于 b(k – 1) 系是前一时刻的已知坐标系,相对 i 系固结,因而有 $\phi_{b(k-1)b(t)} \equiv \phi_{ib(t)}$, 简写为 $\phi(t)$; b 系相对于 i 系转动对应的角增量记作 $\Delta \theta(t)$ 。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) \, d\tau \qquad (6.214)$$

根据罗德里格斯公式(6.137),有

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin\phi(t)}{\phi(t)} \left[\boldsymbol{\phi}(t)\times\right] + \frac{1-\cos\phi(t)}{\phi(t)^2} \left[\boldsymbol{\phi}(t)\times\right]^2 \tag{6.215}$$

对等效旋转矢量作小量假设(惯导数据率足够高,以保证 ϕ 是一个合理的小量), 则有 $(\sin \phi)/\phi \approx 1$,忽略式(6.215)等号右边第三项 (ϕ 的二阶项),可得

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b(t)}}^{\mathrm{b(k-1)}} \approx \mathbf{I} + [\boldsymbol{\phi}(\mathrm{t}) \times] \approx \mathbf{I} + [\Delta \boldsymbol{\theta}(\mathrm{t}) \times]$$
 (6.216)

式(6.216)的合理性解释可参考等效旋转矢量求解过程中对式(6.169)的近似处理。将式 (6.216)代入式 (6.212),可得

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\mathbf{I} + (\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times) \right] \mathbf{f}^b(t) dt$$
$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}^b(t) dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^b(t) dt \qquad (6.217)$$
$$= \Delta \mathbf{v}_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^b(t) dt$$

式中, $\Delta \mathbf{v}_k$ 为加速度计输出的速度增量测量值。与本章6.2.4.4小节求解等效旋转矢量遇 到的问题相似,求解式(6.217)的积分项需要角增量 $\Delta \boldsymbol{\theta}(t)$ 和 $\mathbf{f}^{b}(t)$ 在时间段 $[\mathbf{t}_{k-1}, \mathbf{t}_k]$ 的数学表达式。然而,IMU 只能测量在离散时刻点 \mathbf{t}_{k-1} 和 \mathbf{t}_k 的角增量和速度增量,中 间的过程信息在离散采样中损失了。因此,需要对 $\Delta \boldsymbol{\theta}(t)$ 和 $\mathbf{f}^{b}(t)$ 在时间段 $[\mathbf{t}_{k-1}, \mathbf{t}_k]$ 内的函数做合理模型假设。接下来假设角速度和比力向量随时间线性变化,推导速度更新的双子样算法。

线性假设:假设在积分时段 [t_{k-2}, t_k] (注意,不是 [t_{k-1}, t_k])内, ω^b_{ib}、f^b 随时间线 性变化,即

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}(t - t_{k-1}), \quad \mathbf{f}^{b}(t) = \mathbf{c} + \mathbf{d}(t - t_{k-1})$$
(6.218)

式中, a、b、c、d 为常向量, 它们决定了角速度和比力的大小和方向。

根据陀螺和加速度计增量输出定义,有

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau \qquad (6.219a)$$

$$\Delta \mathbf{v}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \mathbf{f}^{b}(\tau) d\tau \qquad (6.219b)$$

参考本章6.2.4.4小节等效旋转矢量的双子样算法,根据式(6.176a)、式(6.176b)、式(6.176c)和式(6.177),基于两个时刻的陀螺角增量观测 $\Delta \theta_{k-1}$ 、 $\Delta \theta_k$,可求解系数 a 和 b:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \Delta \boldsymbol{\theta}_k}{2\Delta t}, \quad \mathbf{b} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_k - \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}}{\Delta t^2}$$
(6.220)

同理,根据两个时刻的加速度计速度增量测量值 $\Delta \mathbf{v}_{k-1}$ 、 $\Delta \mathbf{v}_k$,可求解系数 c 和 d:

$$\mathbf{c} = \frac{\Delta \mathbf{v}_{k-1} + \Delta \mathbf{v}_k}{2\Delta t}, \quad \mathbf{d} = \frac{\Delta \mathbf{v}_k - \Delta \mathbf{v}_{k-1}}{\Delta t^2}$$
(6.221)

式中 $\Delta t = t_k - t_{k-1} = t_{k-1} - t_{k-2}$ 。将式 (6.218) 中 ω_{ib}^b 表达式代入式 (6.219a),得

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau = \int_{t_{k-1}}^{t} \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau$$

= $\mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}(t - t_{k-1})^{2}$ (6.222)

将式 (6.220)、式 (6.222) 代入等式 (6.217) 右边积分项, 整理可得

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{\mathbf{b}}(t) \, dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{b}(t - t_{k-1})^2 \right] \times \left[\mathbf{c} + \mathbf{d}(t - t_{k-1}) \right] dt$$
$$= \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \frac{\Delta t^3}{3} \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \frac{\Delta t^4}{8} \mathbf{b} \times \mathbf{d}$$
(6.223)

将式 (6.220) 和式(6.221)代人式 (6.223), 整理可得

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{b}(t) dt = \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_k + \frac{1}{12} \left(\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_k + \Delta \mathbf{v}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k \right) \quad (6.224)$$

上式整理过程中需用到向量的叉乘关系式:对任意向量 \mathbf{v} 、 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 有 $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$ 。将式 (6.224) 代入式 (6.217),可得 b 系比力积分项

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta \mathbf{v}_k + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_k + \frac{1}{12} \left(\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_k + \Delta \mathbf{v}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k \right)$$
(6.225)

至此,n 系下速度微分方程的求解过程推导完毕,形成了一套完整的速度递推计算 式,主要包括:式(6.203a)、式(6.205)、式(6.211)、式(6.213)和式(6.225)。

式(6.225)等号右边第二项是二子样速度更新的旋转误差(rotation term)补偿项, 其含义为对积分时段内比力向量 f 方向变化的补偿。第三项为二子样速度更新的划桨误 差(sculling term)补偿项。

速度旋转和划桨误差的解释

根据角增量和速度增量的定义式(6.219a)和式(6.219b),有

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) = \frac{d\Delta\boldsymbol{\theta}(t)}{dt}$$
(6.226a)

$$\mathbf{f}^{\mathbf{b}}\left(\mathbf{t}\right) = \frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{v}\left(\mathbf{t}\right)}{\mathrm{d}\mathbf{t}} \tag{6.226b}$$

根据向量对时间求导公式(2.44f),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} [\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta \mathbf{v}(t)] = \frac{\mathrm{d}\Delta \boldsymbol{\theta}(t)}{\mathrm{dt}} \times \Delta \mathbf{v}(t) + \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \frac{\mathrm{d}\Delta \mathbf{v}(t)}{\mathrm{dt}}$$

$$= \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}(t) \times \Delta \mathbf{v}(t) + \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{\mathrm{b}}(t)$$
(6.227)

根据式(6.227),可将式(6.217)等号右边的被积函数 $\Delta \theta$ (t) × f^b(t) 改写为

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{b}(t) = \frac{d \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta \mathbf{v}(t)\right]}{dt} - \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) \times \Delta \mathbf{v}(t)$$
(6.228)

将式(6.227)改写如下:

$$\frac{\mathrm{d}[\Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta\mathbf{v}(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}[\Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta\mathbf{v}(t)]}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}[\Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta\mathbf{v}(t)]}{\mathrm{d}t}
= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}[\Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta\mathbf{v}(t)]}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}(t) \times \Delta\mathbf{v}(t) + \Delta\boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{\mathrm{b}}(t)\right]$$
(6.229)

将式(6.229)代入式(6.228),整理得

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{b}(t) = \frac{1}{2} \frac{d \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta \mathbf{v}(t) \right]}{dt} + \frac{1}{2} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{b}(t) - \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) \times \Delta \mathbf{v}(t) \right]$$
$$= \frac{1}{2} \frac{d \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \Delta \mathbf{v}(t) \right]}{dt} + \frac{1}{2} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{b}(t) + \Delta \mathbf{v}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) \right]$$
(6.230)

在时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内, 对式(6.230)等号两边同时积分, 得

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^{b}(t) dt = \Delta \mathbf{v}_{rot}^{b(k-1)} + \Delta \mathbf{v}_{scul}^{b(k-1)}$$
(6.231a)

$$\Delta \mathbf{v}_{\rm rot}^{\rm b(k-1)} = \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_{\rm k} \times \Delta \mathbf{v}_{\rm k}$$
(6.231b)

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{scul}}^{\text{b}(\text{k}-1)} = \frac{1}{2} \int_{\text{t}_{\text{k}-1}}^{\text{t}_{\text{k}}} \left[\Delta \boldsymbol{\theta}(\text{t}) \times \mathbf{f}^{\text{b}}(\text{t}) + \Delta \mathbf{v}(\text{t}) \times \boldsymbol{\omega}_{\text{ib}}^{\text{b}}(\text{t}) \right] d\text{t}$$
(6.231c)

 $\Delta \mathbf{v}_{rot}^{b(k-1)}$ 称作速度的旋转效应补偿项,它是由积分时间段内比力向量的方向在空间 旋转变化引起的。 $\Delta \mathbf{v}_{scul}^{b(k-1)}$ 称作速度的划桨效应补偿项,因为它在载体经历典型"划桨 运动"的动态下表现最明显。典型的"划桨运动"是指载体沿着某个轴(如b系x轴) 做角振动,同时沿与之垂直的另一个方向(如b系y轴)做线振动,角速率与加速度 频率相同但相位差 90°。这与现实中的划船动作很相似:船桨绕船的横向做周期性摇动 (角运动),同时,船体会随着摇桨出现间歇性的前向加减速运动(线运动)。关于划桨 误差更深入的解释可参考[12, p.92-93]。

6.4 位置算法

位置更新是惯导算法最后一个积分运算环节,与姿态和速度更新算法相比,它引起的计算误差一般相对较小,可采用比较简单的梯形积分进行简化处理。不必像姿态求解 那样,对各项计算误差"毫厘必争"。

载体的位置可用大地坐标 (即纬度 φ 、经度 λ 和椭球高 h) 来表示, 如第2章2.3.2.1小节所述。位置随时间的变化可用微分方程组(2.79)来描述, 省略时间变量符号 t 后, 重写如下:

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{N}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h}} \tag{6.232a}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_{\rm E}}{(R_{\rm N} + h)\cos\varphi} \tag{6.232b}$$

$$\dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{v}_{\mathrm{D}} \tag{6.232c}$$

式中, R_M和 R_N分别为载体所在位置的子午圈半径和卯酉圈半径, v_N、v_E和 v_D为载体速度向量在 n 系北向、东向和垂向 3 个方向上的投影分量。

从式(6.232a)~式(6.232c)可以看出,更新 φ 和 λ 时需要 h,而计算 λ 时需要 φ ,因此按照高程、纬度和经度的顺序进行位置的更新是比较合理的选择。在时段 [t_{k-1} , t_k]内,对式(6.232c)等号两边积分,可得

$$h_k = h_{k-1} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_D(t) dt$$
 (6.233)

式中, h_{k-1} 是 t_{k-1} 时刻的高程, 为积分初值。假设积分周期内 v_D 随时间线性变化, 式 (6.233) 的积分简化为梯形积分:

$$h_{k} = h_{k-1} - \frac{1}{2}(v_{D,k-1} + v_{D,k})\Delta t$$
 (6.234)

式中, $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, $v_{D,k-1}$ 和 $v_{D,k}$ 分别表示 t_{k-1} 和 t_k 时刻的垂向速度,均为已知值。

在时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内,对式(6.232a)等号两边积分,假设积分周期内北向速度 v_N 随时间线性变化;忽略子午圈半径 R_M 随纬度 λ (和时间)的变化,简化为常值;高程 h 在积分周期内简化为常值,令其等于积分周期内的平均高程 \overline{h} 。有

$$\varphi_{k} = \varphi_{k-1} + \frac{v_{N,k} + v_{N,k-1}}{2(R_{M,k-1} + \bar{h})} \Delta t$$
(6.235)

$$\bar{\mathbf{h}} = \frac{1}{2}(\mathbf{h}_{\mathbf{k}} + \mathbf{h}_{\mathbf{k}-1})$$
 (6.236)

式中 $R_{M,k-1}$ 表示用 t_{k-1} 时刻位置计算的子午圈半径 R_M 。同理,可得经度的递推计算

$$\lambda_{k} = \lambda_{k-1} + \frac{v_{E,k} + v_{E,k-1}}{2\left(R_{N,k-1/2} + \bar{h}\right)\cos\bar{\varphi}}\Delta t$$
(6.237)

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}-1}) \tag{6.238}$$

式中, R_{N,k-1/2} 表示用中间时刻载体纬度计算的卯酉圈半径。

惯导位置更新算法至此推导完毕。值得注意的是,本书采用大地坐标的形式来表示位置和做位置的递推计算,经度在两极地区将出现歧义。需要工作在两极地区的导航系统应该注意这个问题,解决办法是将位置表示成笛卡尔直角坐标的形式(见 第2章2.3.2.1小节),相关算法也比较简单,读者可自行推导。对位置算法有更高要求 的读者可查阅参考文献[19]。

6.5 惯导机械编排算法设计

算法1为本书惯导机械编排算法的伪代码。其中,Earth 表示计算地球椭球相关的 参数,包括子午圈半径、卯酉圈半径、重力加速度、地球自转角速度和位移角速度等; Project 表示将比力积分项投影到 n 系;GraCorForce 表示计算重力加速度和哥氏加 速度;rotvec2quat 表示等效旋转矢量转四元数。算法实现可参考编者课题组开源的 INS/GNSS 组合导航软件 KF-GINS: https://github.com/i2Nav-WHU/KF-GINS (C++ 版本), https://github.com/i2Nav-WHU/KF-GINS-Matlab (MATLAB 版本)。值得注意 的是,在 KF-GINS 的代码中,速度、位置的外推采用了和上述伪代码不同的形式(精 度差异可忽略),位置通过等价的 \mathbf{C}_{n}^{e} 更新实现。 算法 1: 惯导机械编排算法

输入: t_{k-2} 和 t_{k-1} 时刻位置 ($\mathbf{p}_{k-2}, \mathbf{p}_{k-1}$)、速度 ($\mathbf{v}_{k-2}^n, \mathbf{v}_{k-1}^n$)、 t_{k-1} 时刻姿态 $(\boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)})$ 输入: IMU 测量值, $\Delta \mathbf{v}_{k-1}$, $\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}$, $\Delta \mathbf{v}_k$, $\Delta \boldsymbol{\theta}_k$, 当前采样间隔 Δt_k **输出:** t_k 时刻位置 (\mathbf{p}_k)、速度 (\mathbf{v}_k^n)、姿态 ($\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)}$) 速度更新算法 // (1) 外推中间时刻位置和速度 $\mathbf{p}_{k-1/2} \leftarrow \tfrac{3}{2} \mathbf{p}_{k-1} - \tfrac{1}{2} \mathbf{p}_{k-2}; \, \mathbf{v}_{k-1/2}^n \leftarrow \tfrac{3}{2} \mathbf{v}_{k-1}^n - \tfrac{1}{2} \mathbf{v}_{k-2}^n \, \, [\text{ref: Eq. 6.206}]$ // (2) 用中间时刻位置和速度重新计算地理参数 $R_M, R_N, \mathbf{g}_p, \boldsymbol{\omega}_{ie}^n, \boldsymbol{\omega}_{en}^n \leftarrow Earth(\mathbf{p}_{k-1/2}, \mathbf{v}_{k-1/2}^n) \text{ [ref: Eq. 2.75, 2.76, 2.84, 6.180i, 6.180j]}$ // (3) 计算 b 系比力积分项 (补偿旋转和划桨效应),并投影到 n 系 $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b} \leftarrow \Delta \mathbf{v}_{k} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k} \times \Delta \mathbf{v}_{k} + \frac{1}{12} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_{k} + \Delta \mathbf{v}_{k-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_{k}) \text{ [ref: Eq.6.225]}$ $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n} \leftarrow \operatorname{Project}(\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b}, \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}, \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}, \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)}, \Delta t_{k}) \text{ [ref: Eq.6.213]}$ // (4) 计算重力/哥氏积分项 $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^{n} \leftarrow GraCorForce(\mathbf{g}_{p}, \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}, \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}, \mathbf{v}_{k-1/2}^{n}, \Delta t_{k}) \text{ [ref: Eq.6.205]}$ // (5) 更新速度 $\mathbf{v}_{k}^{n} \leftarrow (\mathbf{v}_{k-1}^{n} + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{n} + \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^{n})$ [ref: Eq.6.203*a*] 位置更新算法 // (1) 计算中间时刻的速度 $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathrm{N},\mathrm{k}-1/2}^{\mathrm{n}} & \mathbf{v}_{\mathrm{E},\mathrm{k}-1/2}^{\mathrm{n}} & \mathbf{v}_{\mathrm{D},\mathrm{k}-1/2}^{\mathrm{n}} \end{bmatrix}^{\top} \leftarrow \mathbf{v}_{\mathrm{k}-1/2}^{\mathrm{n}} \leftarrow \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{\mathrm{k}-1}^{\mathrm{n}} + \mathbf{v}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}})$ // (2) 更新高程,并计算中间时刻的高程 $h_{k} \leftarrow h_{k-1} - v_{D,k-1/2}^{n} \Delta t_{k}; h_{k-1/2} \leftarrow \frac{1}{2}(h_{k-1} + h_{k})$ [ref: Eq.6.234] // (3) 更新纬度,并计算中间时刻的纬度 $\varphi_{\mathbf{k}} \leftarrow \varphi_{\mathbf{k}-1} + \mathbf{v}_{\mathbf{N},\mathbf{k}-1/2}^{\mathbf{n}} \Delta \mathbf{t}_{\mathbf{k}} / (\mathbf{R}_{\mathbf{M}} + \mathbf{h}_{\mathbf{k}-1/2}); \ \varphi_{\mathbf{k}-1/2} \leftarrow \frac{1}{2} (\varphi_{\mathbf{k}-1} + \varphi_{\mathbf{k}}) \ [\text{ref: Eq.6.235}]$ // (4) 更新经度 $\lambda_{k} \leftarrow \lambda_{k-1} + v_{E,k-1/2}^{n} \Delta t_{k} / \left((R_{N} + h_{k-1/2}) \cos(\varphi_{k-1/2}) \right) \text{ [ref: Eq.6.237]}$ 姿态更新算法 // (1) 重新计算中间时刻的位置和速度 $\mathbf{p}_{k-1/2} \leftarrow \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{p}_k); \, \mathbf{v}_{k-1/2}^n \leftarrow \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{k-1}^n + \mathbf{v}_k^n)$ // (2) 重新计算地理参数 $R_M, R_N, g_p, \omega_{ie}^n, \omega_{en}^n \leftarrow Earth(p_{k-1/2}, v_{k-1/2}^n) [ref: Eq. 2.75, 2.76, 2.84, 6.180i, 6.180j]$ // (3) 计算 n 系的旋转四元数 $\boldsymbol{\zeta}_{k} \leftarrow (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) \Delta t_{k}; \, \boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \leftarrow rotvec2quat(-\boldsymbol{\zeta}_{k}) \, [ref: Eq.6.180h, \, 6.180e]$ // (4) 计算 b 系的旋转四元数 (补偿圆锥效应) $\phi_{k} \leftarrow \Delta \theta_{k} + \frac{1}{12} (\Delta \theta_{k-1} \times \Delta \theta_{k}); \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \leftarrow rotvec2quat(\phi_{k}) [ref: Eq.6.180c, 6.180b]$ // (5) 更新姿态 $\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} \leftarrow \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \circ \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \circ \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \text{ [ref: Eq.6.180a]}$

第7章 惯导误差传播分析

7.1 引言

前面介绍惯性导航原理和机械编排算法的过程中, INS 被看作没有误差的理想系统。实际上, INS 的位置、速度和姿态等导航参数都不可避免地存在误差。"惯性导航的误差随时间累积"估计是初学者在惯导学习的早期就能形成的基本认识, 第3章3.5.5小节对惯导误差做过如下定量的描述:"典型的导航级惯导独立推算 1 小时,平面位置误差为 1~2 海里。"该误差指标是如何计算得到的?本章7.3.2小节将给出答案。

惯导的误差源主要包括¹:1)惯性传感器误差,即陀螺和加速度计的噪声、零偏、 比例因子误差和交轴耦合等;2)导航初始化误差,包括位置、速度和姿态等参数的初 始对准误差;3)重力误差,主要是重力模型不精确和位置误差导致的重力加速度计算 误差等。上述误差源随着惯导积分运算和导航参数的更新进行传播,导致导航参数误差 不断累积。惯性导航误差随时间的变化规律可用一组微分方程来描述,称作惯导误差方 程或惯导误差微分方程。

能否通过求解惯导误差微分方程得到导航误差的解析表达式呢? 很遗憾,绝大部分 情况下不能。因为惯导误差的传播是一个随机噪声驱动的复杂时变系统,并且跟载体的 运动轨迹和动态紧密相关,即方程中各误差源的系数包含跟载体轨迹和动态有关的时 变量。一般情况下,只能通过数据仿真的方法对导航误差进行定量评估,只有在某些特 定的极其简单的场景下可以求得解析解,例如静止状态。另外,一旦引入外部观测对惯 导进行修正,形成组合导航解算,导航误差的传播和定量分析则变得更加复杂。因此, 惯性导航及组合导航的误差通常只能定性分析,而无法像全站仪或 GNSS 一样能对其 定位结果的误差做定量描述。

本章首先推导姿态、速度和位置误差微分方程。然后,分析静基座条件下(即惯导相对地面静止,此时复杂的惯导误差传播模型退化为线性定常系统)惯导的误差传播, 这将有助于加深读者对惯导误差规律的认识。此外,惯导误差微分方程连同传感器误差 模型构成了组合导航卡尔曼滤波的系统方程,是实现组合导航解算的基础。

7.2 惯导误差方程

带有误差的变量表示为真值与误差之和,记作

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \tag{7.1}$$

或者

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \tag{7.2}$$

¹算法设计也会导致导航误差,例如在更新惯导的位置、速度和姿态时所做的近似和简化处理。但是算 法近似所带来的误差远小于惯性传感器误差的影响。

式中, x 表示任意变量的真值, 上标^{*}或 \hat{x} 为含有误差的变量计算值, 如惯导输出的位置、速度和姿态等导航参数; 上标 ~ 或 \hat{x} 表示含有误差的传感器测量值; δx 为 \hat{x} 或 \hat{x} 相对其真值 x 的误差, 也称作扰动误差 (perturbation error)。一般**假设变量的误差** δx 为小量, 以便实现惯导运动方程的线性化²。如果某个变量或函数是准确已知的 (如 ω_{ie}^{e}),则无需给它加扰动误差。符号 δ 还可理解为取误差的运算符, 对任意变量 x_{1} 和 x_{2} 取误差满足:

$$\delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \delta \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}_2 \tag{7.3}$$

变量的取误差运算 δ 与求导运算 d()/dt 可交换顺序:

$$\delta(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{\mathrm{d}(\delta \mathbf{x})}{\mathrm{dt}}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{dt}}$$
(7.4)

假设 y 是变量 x 的函数 $f(\mathbf{x})$, 记作

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \tag{7.5}$$

如果变量 **x** 含有误差,则函数值 **y** 也含有误差,记作 $\hat{\mathbf{y}}$,对 $f(\hat{\mathbf{x}})$ 在 **x** 的真值(记作 $\mathbf{x} \triangleq \mathbf{x}_t$)处进行泰勒展开,取至一阶近似,得

$$\hat{\mathbf{y}} = f(\hat{\mathbf{x}}) \approx f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{t}} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$$

$$= f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{t}} \delta \mathbf{x}$$
(7.6)

易得函数值 y 的扰动误差

$$\delta \mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \approx \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{t}} \delta \mathbf{x}$$
(7.7)

根据扰动误差定义式(7.1)和式(7.2),可写出惯导解算的位置、速度和姿态及比力、 角速度测量值的扰动方程:

$$\hat{\mathbf{r}}^{n} = \mathbf{r}^{n} + \delta \mathbf{r}^{n} \tag{7.8a}$$

$$\hat{\mathbf{v}}^{n} = \mathbf{v}^{n} + \delta \mathbf{v}^{n} \tag{7.8b}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} = \left[\mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi} \times)\right] \mathbf{C}_{b}^{n}$$
(7.8c)

$$\tilde{\mathbf{f}}^{\mathbf{b}} = \mathbf{f}^{\mathbf{b}} + \delta \mathbf{f}^{\mathbf{b}} \tag{7.8d}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$$
(7.8e)

式中, $\hat{\mathbf{r}}^n$ 和 $\hat{\mathbf{v}}^n$ 分别为惯导解算的载体位置和速度向量, \mathbf{r}^n 和 \mathbf{v}^n 为位置和速度真值, $\delta \mathbf{r}^n = [\delta r_N \ \delta r_E \ \delta r_D]^\top$, $\delta \mathbf{v}^n = [\delta v_N \ \delta v_E \ \delta v_D]^\top$ 分别为惯导位置误差和速度误差向量, δr_N 、 δr_E 和 δr_D 分别为北向 (N)、东向 (E) 和地向 (D) 的位置误差,速度误差分量的 右下标含义与此相同。 ϕ 为姿态误差,定义详见7.2.1节; $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^b_{ib}$ 和 $\tilde{\mathbf{f}}^b$ 分别为陀螺和加速度

²当扰动误差非小量时,强行使用线性方程则可能导致误差太大而不能接受。

计的角速度和比力测量值, ω_{ib}^{b} 和 f^b 则分别为陀螺和加速度计感知的角速度和比力真 值, $\delta \omega_{ib}^{b}$ 和 δf^{b} 分别为陀螺和加速度计的测量误差,是零偏、比例因子误差和噪声等误 差项的总和,详见4.2.7节。位置误差也可表示为大地坐标(纬度 φ 、经度 λ 和高程 h) 的误差,为了与 δr^{n} 区分,将其记作 δp :

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, \quad \delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta \varphi & \delta \lambda & \delta \mathbf{h} \end{bmatrix}^{\top}$$
(7.9)

式中, $\delta \varphi$ 、 $\delta \lambda$ 和 δh 分别为纬度误差、经度误差和高程误差。 $\delta \mathbf{r}^n$ 与 $\delta \mathbf{p}$ 的转换关系为

$$\delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}} = \delta \varphi(\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h}) \tag{7.10a}$$

$$\delta \mathbf{r}_{\rm E} = \delta \lambda (\mathbf{R}_{\rm N} + \mathbf{h}) \cos \varphi \tag{7.10b}$$

$$\delta \mathbf{r}_{\mathrm{D}} = -\delta \mathbf{h} \tag{7.10c}$$

式中, R_M和 R_N分别为载体所在位置的子午圈半径和卯酉圈半径, 见2.3.3节。

惯导误差方程推导的目标是求位置、速度和姿态误差关于时间的导数,并将其写成 各误差项的如下线性函数形式:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_{\text{INS}} = \mathcal{L} \left(\delta \mathbf{r}^{\text{n}}, \ \delta \mathbf{v}^{\text{n}}, \ \phi, \ \delta \mathbf{f}^{\text{b}}, \ \delta \boldsymbol{\omega}_{\text{ib}}^{\text{b}} \right), \ \delta \mathbf{x}_{\text{INS}} = \delta \mathbf{r}^{\text{n}}, \ \delta \mathbf{v}^{\text{n}}, \ \phi$$
(7.11)

式中, *L* 表示线性组合, 后续为书写方便, 都没有明确写出各误差项的时间变量符号 t。

惯导机械编排解算频繁涉及 n 系下地球自转角速度 ω_{ie}^{n} 、位移角速度 ω_{en}^{n} 和重力加速度 \mathbf{g}_{p}^{n} 的计算,接下来先推导它们的扰动误差表达式。

(1) ω_{ie}^{n} 的扰动误差

角速度 ω_{ie}^{n} 的表达式(2.70)重写如下:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \begin{bmatrix} \omega_{ie,N}^{n} & \omega_{ie,E}^{n} & \omega_{ie,D}^{n} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} \omega_{e} \cos \varphi & 0 & -\omega_{e} \sin \varphi \end{bmatrix}^{\top}$$
(7.12)

式中, ω_{e} 为地球自转角速率常值,可以不考虑其误差。 ω_{ie}^{n} 是纬度 φ 的函数,受纬度误 差 $\delta\varphi$ 的影响,实际计算值为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n} = \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \tag{7.13}$$

将 $\hat{\varphi} = \varphi + \delta \varphi$ 代入式(7.12)后展开,得

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n} = \begin{bmatrix} \omega_{e} \cos(\varphi + \delta\varphi) \\ 0 \\ -\omega_{e} \sin(\varphi + \delta\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{e} (\cos\varphi\cos\delta\varphi - \sin\varphi\sin\delta\varphi) \\ 0 \\ -\omega_{e} (\sin\varphi\cos\delta\varphi + \cos\varphi\sin\delta\varphi) \end{bmatrix}$$
(7.14)

纬度误差 $\delta \varphi$ 为小量时, $\cos \delta \varphi \approx 1$, $\sin \delta \varphi \approx \delta \varphi$, 则式(7.14)近似为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n} \approx \begin{bmatrix} \omega_{e} \cos \varphi - \omega_{e} \sin \varphi \delta \varphi \\ 0 \\ -\omega_{e} \sin \varphi - \omega_{e} \cos \varphi \delta \varphi \end{bmatrix}$$
(7.15)

根据式 (7.12) 和式 (7.15), 可得

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n} - \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \begin{bmatrix} -\omega_{e} \sin \varphi \delta \varphi & 0 & -\omega_{e} \cos \varphi \delta \varphi \end{bmatrix}^{\top}$$
(7.16)

式(7.16)即 ω_{ie}^{n} 的扰动误差方程。以上推导过程是将函数中的变量替换为含有误差的变量计算值,整理后与函数真值求差,该过程称作扰动分析 (perturbation analysis)。式(7.16)还可以根据式(7.7)直接求偏导得到

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\begin{bmatrix} \omega_{e}\cos\varphi \\ 0 \\ -\omega_{e}\sin\varphi \end{bmatrix} \right) \delta\varphi = \begin{bmatrix} -\omega_{e}\sin\varphi \\ 0 \\ -\omega_{e}\cos\varphi \end{bmatrix} \delta\varphi$$
(7.17)

将式 (7.10a) 和式 (7.10b) 代入式 (7.16), 可得

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \left[-\frac{\omega_{e} \sin \varphi}{R_{M} + h} \delta r_{N} \quad 0 \quad -\frac{\omega_{e} \cos \varphi}{R_{M} + h} \delta r_{N} \right]^{\top}$$
(7.18)

(2) ωⁿ_{en} 的扰动误差

位移角速度 ω_{en}^{n} 的表达式(3.17)重写如下:

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} \frac{v_{E}}{R_{N} + h} & \frac{-v_{N}}{R_{M} + h} & -\frac{v_{E} \tan \varphi}{R_{N} + h} \end{bmatrix}^{\top}$$
(7.19)

 $\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$ 式中的曲率半径 R_{M} 和 R_{N} 是纬度 φ 的函数,但当 $\delta \varphi$ 是小量时, R_{M} 和 R_{N} 的扰动误差可忽略不计,近似为常值。 $\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$ 实际计算值为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n} = \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} \tag{7.20}$$

根据式(7.7),可得

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}}{\partial h}\delta h + \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}}{\partial v_{N}}\delta v_{N} + \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}}{\partial v_{E}}\delta v_{E}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-v_{E}}{(R_{N}+h)^{2}}\delta h + \frac{1}{R_{N}+h}\delta v_{E} \\ \frac{-v_{N}}{(R_{M}+h)^{2}}\delta h - \frac{1}{R_{M}+h}\delta v_{N} \\ -\frac{v_{E}}{(R_{N}+h)\cos^{2}\varphi}\delta\varphi + \frac{v_{E}\tan\varphi}{(R_{N}+h)^{2}}\delta h - \frac{\tan\varphi}{R_{N}+h}\delta v_{E} \end{bmatrix}$$
(7.21)

将式(7.10a)和式(7.10c)代入式(7.21),则 $\delta \omega_{en}^{n}$ 也可写成如下形式:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} \frac{v_{E}}{(R_{N}+h)^{2}}\delta r_{D} + \frac{1}{R_{N}+h}\delta v_{E} \\ -\frac{v_{N}}{(R_{M}+h)^{2}}\delta r_{D} - \frac{1}{R_{M}+h}\delta v_{N} \\ -\frac{v_{E}}{(R_{M}+h)(R_{N}+h)\cos^{2}\varphi}\delta r_{N} - \frac{v_{E}\tan\varphi}{(R_{N}+h)^{2}}\delta r_{D} - \frac{\tan\varphi}{R_{N}+h}\delta v_{E} \end{bmatrix}$$
(7.22)

对于角速度向量 ω_{in}^{n} ,有

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n} = \boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} + \boldsymbol{\omega}_{\rm en}^{\rm n} \tag{7.23}$$

根据式(7.3),易得 $\delta \omega_{in}^{n}$ 的表达式

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_{e}\sin\varphi}{R_{M}+h}\delta r_{N} + \frac{v_{E}}{(R_{N}+h)^{2}}\delta r_{D} + \frac{1}{R_{N}+h}\delta v_{E} \\ -\frac{-\frac{v_{N}}{(R_{M}+h)^{2}}\delta r_{D} - \frac{1}{R_{M}+h}\delta v_{N} \\ -\left(\frac{v_{E}\sec^{2}\varphi}{(R_{M}+h)(R_{N}+h)} + \frac{\omega_{e}\cos\varphi}{R_{M}+h}\right)\delta r_{N} - \frac{v_{E}\tan\varphi}{(R_{N}+h)^{2}}\delta r_{D} - \frac{\tan\varphi}{R_{N}+h}\delta v_{E} \end{bmatrix}$$
(7.24)

(3) gⁿ 的扰动误差

重力加速度向量的计算值为真值与扰动误差之和:

$$\hat{\mathbf{g}}_{p}^{n} = \mathbf{g}_{p}^{n} + \delta \mathbf{g}_{p}^{n} \tag{7.25}$$

本书第2章2.3.4.1小节详细讨论了重力加速度的定义,根据式(2.82)可知,重力加速 度受纬度和高程的影响,但是当纬度误差为小量时对重力加速度的影响可忽略不计;高 程误差的影响则较为显著,例如,3m的高程误差会造成约1mGal的重力加速度误差。 重力加速度随高程的变化关系近似为[17, p.57]:

$$g(\varphi, h) = g(\varphi) \frac{R_M R_N}{\left(\sqrt{R_M R_N} + h\right)^2}$$
(7.26)

式中, g(φ) 为载体位置对应的椭球表面 (h = 0) 处的正常重力值, g(φ ,h) 为载体所在 位置的重力加速度值,详见第2章2.3.4.1小节; R_M 和 R_N 近似为常值,忽略其受纬度误 差的影响。根据式(7.3),易得

$$\delta g(\varphi, h) = \left. \frac{\partial (g(\varphi, h))}{\partial h} \right|_{h} \delta h = g(\varphi) \frac{-2R_{M}R_{N}}{\left(\sqrt{R_{M}R_{N}} + h\right)^{3}} \delta h$$
(7.27)

将式 (7.26) 代入式(7.27),得

$$\delta g(\varphi, h) = \frac{-2g(\varphi, h)}{\sqrt{R_M R_N} + h} \delta h$$
(7.28)

根据式(2.84),重力加速度 g_p^n 的北向和东向分量为0,因此,

$$\delta \mathbf{g}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\mathrm{g}\left(\varphi, \mathrm{h}\right)}{\sqrt{\mathrm{R}_{\mathrm{M}}\mathrm{R}_{\mathrm{N}}} + \mathrm{h}} \delta \mathrm{r}_{\mathrm{D}} \end{bmatrix}$$
(7.29)

(4) 位置矩阵 C_n 的扰动误差

位置矩阵 C_n^e 的方程式(A.21)重写如下:

$$\mathbf{C}_{n}^{e} = \begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda & -\cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{vmatrix}$$
(7.30)

 C_n^e 是纬度 φ 和经度 λ 的函数,实际计算的大地坐标含有误差,则实际计算的位置 矩阵为真值和扰动误差之和

$$\hat{\mathbf{C}}_{n}^{e} = \mathbf{C}_{n}^{e} + \delta \mathbf{C}_{n}^{e} \tag{7.31}$$

 δC_n^e 可根据式(7.7)求偏导得到

$$\begin{split} \delta \mathbf{C}_{n}^{e} &= \frac{\partial \mathbf{C}_{n}^{e}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathbf{C}_{n}^{e}}{\partial \lambda} \delta \lambda \\ &= \begin{bmatrix} -c\varphi c\lambda & 0 & s\varphi c\lambda \\ -c\varphi s\lambda & 0 & s\varphi s\lambda \\ -s\varphi & 0 & -c\varphi \end{bmatrix} \delta \varphi + \begin{bmatrix} s\varphi s\lambda & -c\lambda & c\varphi s\lambda \\ -s\varphi c\lambda & -s\lambda & -c\varphi c\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \lambda \\ &= \begin{bmatrix} -\delta\varphi c\varphi c\lambda + \delta\lambda s\varphi s\lambda & -\delta\lambda c\lambda & \delta\varphi s\varphi c\lambda + \delta\lambda c\varphi s\lambda \\ -\delta\varphi c\varphi s\lambda - \delta\lambda s\varphi c\lambda & -\delta\lambda s\lambda & \delta\varphi s\varphi s\lambda - \delta\lambda c\varphi c\lambda \\ -\delta\varphi s\varphi & 0 & -\delta\varphi c\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -s\varphi c\lambda & -s\lambda & -c\varphi c\lambda \\ -s\varphi s\lambda & c\lambda & -c\varphi s\lambda \\ c\varphi & 0 & -s\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \delta\lambda s\varphi & -\delta\varphi \\ -\delta\lambda s\varphi & 0 & -\delta\lambda c\varphi \\ \delta\varphi & \delta\lambda c\varphi & 0 \end{bmatrix} \end{split}$$
(7.32)

式中, c = cos(), s = sin()。记

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \delta \lambda \cos \varphi \\ -\delta \varphi \\ -\delta \lambda \sin \varphi \end{bmatrix}$$
(7.33)

将式(7.33)代入式(7.32),则有

$$\delta \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} \left(\delta \boldsymbol{\theta} \times \right) \tag{7.34}$$

将式(7.34)代入式(7.31),则有

$$\hat{\mathbf{C}}_{n}^{e} = \mathbf{C}_{n}^{e} \left[\mathbf{I}_{3} + (\delta \boldsymbol{\theta} \times) \right]$$
(7.35)

*δ***θ** 是由纬度和经度误差导致的 e 系相对于 n 系的角度偏差,即真 n 系到计算的 n 系(原点位于实际计算的含有误差的位置处)的等效旋转矢量。将式(7.10a)~式(7.10c)代

入式(7.33),可得

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \delta \lambda \cos \varphi \\ -\delta \varphi \\ -\delta \lambda \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta r_{\rm E} / (R_{\rm N} + h) \\ -\delta r_{\rm N} / (R_{\rm M} + h) \\ -\delta r_{\rm E} \tan \varphi / (R_{\rm N} + h) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 / (R_{\rm N} + h) & 0 \\ -1 / (R_{\rm M} + h) & 0 & 0 \\ 0 & -\tan \varphi / (R_{\rm N} + h) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_{\rm N} \\ \delta r_{\rm E} \\ \delta r_{\rm D} \end{bmatrix}$$
(7.36)
$$= \mathbf{M}_{\rm R} \delta \mathbf{r}^{\rm n}$$

式中,

$$\mathbf{M}_{\rm R} = \begin{bmatrix} 0 & 1/({\rm R}_{\rm N} + {\rm h}) & 0\\ -1/({\rm R}_{\rm M} + {\rm h}) & 0 & 0\\ 0 & -\tan\varphi/({\rm R}_{\rm N} + {\rm h}) & 0 \end{bmatrix}$$
(7.37)

7.2.1 姿态误差微分方程

捷联惯导通过姿态解算建立导航的数学平台,将 b 系下的测量值投影变换至选定 的参考系。若以 n 系为参考,则从 b 系到 n 系理想无误差的坐标变换矩阵为 C_b^n ,惯 导解算的含有误差的姿态矩阵为 \hat{C}_b^n ,两者之间存在偏差。由于姿态是描述两个坐标系 之间的相对角度关系,可以不失一般性地假设 \hat{C}_b^n 与 C_b^n 的 b 系对齐,偏差表现为 î 与 n 系之间的不一致,直观理解为惯导基于姿态矩阵建立的 n 系不准,记作 î 系³,如 图7.1所示。因此,**惯导的姿态误差可由等效旋转矢量** $\phi_{n\hat{n}}$ 定义,常称其为失准角,理 解为 n 系绕 $\phi_{n\hat{n}}$ 的方向转动角度 $\|\phi_{n\hat{n}}\|$ 后与 î 对齐,如图7.1所示。



图 7.1 姿态误差示意图

根据第6章6.2.4.2小节,易知 $\phi_{n\hat{n}}$ 在 \hat{n} 系与 n 系下的坐标相同:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{n}\hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{n}\hat{\mathbf{n}}}^{\hat{\mathbf{n}}} = \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{N}} & \phi_{\mathrm{E}} & \phi_{\mathrm{D}} \end{bmatrix}^{\top}$$
(7.38)

³可以类比于向量:向量是从起点指向终点的有向线段,考察向量误差时可认为向量起点跟实际起点 重合,误差表现为向量终点与实际终点的不一致。

后续为书写简洁,不明确写姿态误差 $\phi_{n\hat{n}}^{n}$ 的上下角标,简记为 ϕ 。根据姿态误差的 定义,含误差的姿态矩阵 \hat{C}_{h}^{n} 可写作

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \equiv \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{\hat{n}}} \tag{7.39}$$

失准角 ϕ 为小量时,根据等效旋转矢量转姿态矩阵的关系式(6.142),有

$$\mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\hat{\mathrm{n}}} \approx \mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi} \times)$$
 (7.40)

根据矩阵链乘规则,由式(7.39)和式(7.40)可得

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\hat{\mathrm{n}}} = \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\hat{\mathrm{n}}} \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$$
$$= \left[\mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi} \times)\right] \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$$
(7.41)

式(7.41)就是前面提到的姿态误差定义式(7.8c)。姿态矩阵 C_b^n 的微分方程式(6.39)重 写如下:

$$\dot{\mathbf{C}}_{b}^{n} = \mathbf{C}_{b}^{n}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times)\mathbf{C}_{b}^{n}$$
(7.42)

接下来推导姿态误差 ϕ 关于时间的导数 ϕ ,即姿态误差微分方程,思路如下:方程 (7.41)等号两边对时间求导,对式 (7.42)进行误差扰动,都将得到 $\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n}$ 的表达式,它们必然相等,略去关于误差的二阶小量,经整理即可得到姿态误差的微分方程。

首先,等式 (7.41)两边对时间求导,得

$$\dot{\hat{\mathbf{C}}}_{b}^{n} = \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} = \frac{d}{dt}\left(\left[\mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi}\times)\right]\mathbf{C}_{b}^{n}\right)
= -(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times)\mathbf{C}_{b}^{n} + \left[\mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi}\times)\right]\dot{\mathbf{C}}_{b}^{n}$$
(7.43)

将式(7.42)代入式(7.43),得

$$\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} = -(\dot{\boldsymbol{\phi}} \times)\mathbf{C}_{b}^{n} + \mathbf{C}_{b}^{n}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times) - (\boldsymbol{\phi} \times)\mathbf{C}_{b}^{n}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times)
+ (\boldsymbol{\phi} \times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times)\mathbf{C}_{b}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times)\mathbf{C}_{b}^{n}$$
(7.44)

然后,对式 (7.42) 进行误差扰动

$$\dot{\hat{\mathbf{C}}}_{b}^{n} = \hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b} \times) - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^{n} \times) \hat{\mathbf{C}}_{b}^{n}$$
(7.45)

将式(7.8e)、式(7.41)和式(7.24)代入方程(7.45)等号右边,整理可得

$$\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} = [\mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_{b}^{n} [(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \times] - [(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^{n}) \times] [\mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_{b}^{n}
\approx \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times) \mathbf{C}_{b}^{n} - (\boldsymbol{\phi} \times) \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times) + \mathbf{C}_{b}^{n} (\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times)
+ (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times) (\boldsymbol{\phi} \times) \mathbf{C}_{b}^{n} - (\delta \boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times) \mathbf{C}_{b}^{n}$$
(7.46)

在式(7.46)的整理过程中略去了误差的二阶小量 ($\phi \times$) $\mathbf{C}_{b}^{n}(\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \times)$ 和 ($\delta \boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times$)($\phi \times$) \mathbf{C}_{b}^{n} (即式中有误差的乘积)。令式 (7.44) 与式 (7.46) 等号右边相等,整理得

$$-(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times)\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} + (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}\times)\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} = \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}\times) + (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}\times)(\boldsymbol{\phi}\times)\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} - (\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}\times)\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$$
(7.47)

方程(7.47)等号两边右乘矩阵 C_n^b,并应用式(2.25),得

$$-(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times) + (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times) = \mathbf{C}_{b}^{n}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\times)\mathbf{C}_{n}^{b} + (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)(\boldsymbol{\phi}\times) - (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)$$
$$= (\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}\times) + (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)(\boldsymbol{\phi}\times) - (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)$$
(7.48)

整理可得

$$(\dot{\boldsymbol{\phi}}\times) = (\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)(\boldsymbol{\phi}\times) - (\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}\times) + (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)$$
(7.49)

根据反对称矩阵乘法运算(2.40),式(7.49)可整理为

$$(\dot{\boldsymbol{\phi}} \times) = [(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{in}^{n}) \times] - (\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{n} \times) + (\delta \boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times)$$
 (7.50)

方程(7.50)等号两边各项均为向量的反对称矩阵,根据第2章2.1.3小节,反对称矩阵 与向量是一一映射关系,因此,式(7.50)可写为等价的向量形式:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times \boldsymbol{\phi} + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^{n} - \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{n}$$

$$= -\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times \boldsymbol{\phi} + \delta \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} \right) - \mathbf{C}_{b}^{n} \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$$
(7.51)

式中, $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{n} = [\delta \omega_{ib,N}^{n} \ \delta \omega_{ib,E}^{n} \ \delta \omega_{ib,D}^{n}]^{T}$ 为陀螺原始测量误差向量在 n 系下的投影。将 式(7.18)和式(7.22)代入式(7.51), 展开后可得

$$\dot{\phi}_{\rm N} = -\frac{\omega_{\rm e}\sin\varphi}{R_{\rm M}+h}\delta r_{\rm N} + \frac{v_{\rm E}}{(R_{\rm N}+h)^2}\delta r_{\rm D} + \frac{1}{R_{\rm N}+h}\delta v_{\rm E} - \left(\omega_{\rm e}\sin\varphi + \frac{v_{\rm E}\tan\varphi}{R_{\rm N}+h}\right)\phi_{\rm E} + \frac{v_{\rm N}}{R_{\rm M}+h}\phi_{\rm D} - \delta\omega_{\rm ib,N}^{\rm n}$$
(7.52)

$$\dot{\phi}_{\rm E} = -\frac{\mathbf{v}_{\rm N}}{(\mathbf{R}_{\rm M} + \mathbf{h})^2} \delta \mathbf{r}_{\rm D} - \frac{1}{\mathbf{R}_{\rm M} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{v}_{\rm N} + \left(\omega_{\rm e} \sin\varphi + \frac{\mathbf{v}_{\rm E} \tan\varphi}{\mathbf{R}_{\rm N} + \mathbf{h}}\right) \phi_{\rm N} + \left(\omega_{\rm e} \cos\varphi + \frac{\mathbf{v}_{\rm E}}{\mathbf{R}_{\rm N} + \mathbf{h}}\right) \phi_{\rm D} - \delta\omega_{\rm ib,E}^{\rm n}$$

$$(7.53)$$

$$\dot{\phi}_{\rm D} = -\left[\frac{\omega_{\rm e}\cos\varphi}{R_{\rm M}+h} + \frac{v_{\rm E}\sec^2\varphi}{(R_{\rm M}+h)(R_{\rm N}+h)}\right]\delta r_{\rm N} - \frac{v_{\rm E}\tan\varphi}{(R_{\rm N}+h)^2}\delta r_{\rm D} - \frac{\tan\varphi}{R_{\rm N}+h}\delta v_{\rm E} - \frac{v_{\rm N}}{R_{\rm M}+h}\phi_{\rm N} - \left(\omega_{\rm e}\cos\varphi + \frac{v_{\rm E}}{R_{\rm N}+h}\right)\phi_{\rm E} - \delta\omega_{\rm ib,D}^{\rm n}$$
(7.54)

式 (7.51) 即捷联惯导姿态误差微分方程,反映了 n 系相对于理想 n 系失准角 ϕ 随时间的变化规律,等式右边是导致惯导姿态误差的各项角速度偏差,其含义解释如 下: $-\mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{n}}\delta\omega_{\mathbf{ib}}^{\mathbf{b}}$ 是陀螺的角速度测量值误差投影至 n 系,经过积分后显然会导致姿态误 差;求解 b 系相对 n 系姿态时,需要扣除地球自转角速度 $\omega_{\mathbf{ie}}^{\mathbf{n}}$ 和位移角速度 $\omega_{\mathbf{en}}^{\mathbf{n}}$ 才得到 $\omega_{\mathbf{nb}}^{\mathbf{n}}$, $\omega_{\mathbf{ie}}^{\mathbf{n}}$ 和 $\omega_{\mathbf{en}}^{\mathbf{n}}$ 的计算受位置和速度误差的影响,对应的角速度误差即 $\delta(\omega_{\mathbf{ie}}^{\mathbf{n}} + \omega_{\mathbf{en}}^{\mathbf{n}})$; $-\omega_{\mathbf{in}}^{\mathbf{n}} \times \phi$ 是在补偿角速度 $\omega_{\mathbf{ie}}^{\mathbf{n}}$ 和 $\omega_{\mathbf{en}}^{\mathbf{n}}$ 时,由于姿态存在误差 ϕ ,导致角速度向量从 n 系到 b 系的投影误差,经过积分后转化为姿态误差; $\omega_{\mathbf{ib}}^{\mathbf{b}}$ 是陀螺在 b 系下的测量值,不需要做投影变换,因此无类似的投影误差。

7.2.2 速度误差微分方程

速度微分方程(6.199)重写如下:

$$\dot{\mathbf{v}}^{n} = \mathbf{C}_{b}^{n} \mathbf{f}^{b} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) \times \mathbf{v}^{n} + \mathbf{g}_{p}^{n}$$
(7.55)

在实际计算时,表示为

$$\dot{\mathbf{v}}^{n} = \hat{\mathbf{C}}^{n}_{b} \tilde{\mathbf{f}}^{b} - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}^{n}_{ie} + \hat{\boldsymbol{\omega}}^{n}_{en}) \times \hat{\mathbf{v}}^{n} + \hat{\mathbf{g}}^{n}_{p}$$
(7.56)

将相关变量误差扰动式(7.8b)、(7.8c)、(7.8d)、(7.13)、(7.20)和(7.25)代入式(7.56), 得

$$\dot{\mathbf{v}}^{n} + \delta \dot{\mathbf{v}}^{n} = [\mathbf{I}_{3} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_{b}^{n} (\mathbf{f}^{b} + \delta \mathbf{f}^{b}) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} + 2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) \times (\mathbf{v}^{n} + \delta \mathbf{v}^{n}) + \mathbf{g}_{p}^{n} + \delta \mathbf{g}_{p}^{n} \quad (7.57)$$

式(7.57)展开后省略关于误差的二阶小量,整理得

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^{n} = \mathbf{C}_{b}^{n} \delta \mathbf{f}^{b} + \mathbf{f}^{n} \times \boldsymbol{\phi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) \times \delta \mathbf{v}^{n} + \mathbf{v}^{n} \times (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) + \delta \mathbf{g}_{p}^{n}$$
(7.58)

式中, $\mathbf{f}^{n} = [\mathbf{f}_{N}, \mathbf{f}_{E}, \mathbf{f}_{D}]^{\top}$ 为比力向量 \mathbf{f} 在 n 系下的坐标;比力向量误差在 n 系下的投影 简写为 $\delta \mathbf{f}^{n} = \mathbf{C}_{b}^{n} \delta \mathbf{f}^{b} = [\delta \mathbf{f}_{N}, \delta \mathbf{f}_{E}, \delta \mathbf{f}_{D}]^{\top}$ 。式(7.58)展开后,可得

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{N}} = -\left[\frac{2\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{e}}\cos\varphi}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}}+\mathbf{h}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}^{2}\sec^{2}\varphi}{(\mathbf{R}_{\mathrm{M}}+\mathbf{h})(\mathbf{R}_{\mathrm{N}}+\mathbf{h})}\right]\delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}} + \left[\frac{\mathbf{v}_{\mathrm{N}}\mathbf{v}_{\mathrm{D}}}{(\mathbf{R}_{\mathrm{M}}+\mathbf{h})^{2}} - \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}^{2}\tan\varphi}{(\mathbf{R}_{\mathrm{N}}+\mathbf{h})^{2}}\right]\delta \mathbf{r}_{\mathrm{D}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{D}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}}+\mathbf{h}}\delta \mathbf{v}_{\mathrm{N}} - 2\left(\omega_{\mathrm{e}}\sin\varphi + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\tan\varphi}{\mathbf{R}_{\mathrm{N}}+\mathbf{h}}\right)\delta \mathbf{v}_{\mathrm{E}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{N}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}}+\mathbf{h}}\delta \mathbf{v}_{\mathrm{D}} - \mathbf{f}_{\mathrm{D}}\phi_{\mathrm{E}} + \mathbf{f}_{\mathrm{E}}\phi_{\mathrm{D}} + \delta \mathbf{f}_{\mathrm{N}}$$

$$(7.59)$$

$$\begin{split} \delta \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{E}} &= \left[\frac{2\omega_{\mathrm{e}}(\mathbf{v}_{\mathrm{N}}\cos\varphi - \mathbf{v}_{\mathrm{D}}\sin\varphi)}{\mathrm{R}_{\mathrm{M}} + \mathrm{h}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{N}}\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\sec^{2}\varphi}{(\mathrm{R}_{\mathrm{M}} + \mathrm{h})(\mathrm{R}_{\mathrm{N}} + \mathrm{h})} \right] \delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\mathbf{v}_{\mathrm{D}} + \mathbf{v}_{\mathrm{N}}\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\tan\varphi}{(\mathrm{R}_{\mathrm{N}} + \mathrm{h})^{2}} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{D}} \\ &+ \left(2\omega_{\mathrm{e}}\sin\varphi + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\tan\varphi}{\mathrm{R}_{\mathrm{N}} + \mathrm{h}} \right) \delta \mathbf{v}_{\mathrm{N}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{D}} + \mathbf{v}_{\mathrm{N}}\tan\varphi}{\mathrm{R}_{\mathrm{N}} + \mathrm{h}} \delta \mathbf{v}_{\mathrm{E}} + \left(2\omega_{\mathrm{e}}\cos\varphi + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}}{\mathrm{R}_{\mathrm{N}} + \mathrm{h}} \right) \delta \mathbf{v}_{\mathrm{D}} \\ &+ f_{\mathrm{D}}\phi_{\mathrm{N}} - f_{\mathrm{N}}\phi_{\mathrm{D}} + \delta f_{\mathrm{E}} \end{split}$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{D}} = \frac{2\omega_{\mathrm{e}} \mathbf{v}_{\mathrm{E}} \sin \varphi}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}} - \left[\frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}^{2}}{(\mathbf{R}_{\mathrm{N}} + \mathbf{h})^{2}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{N}}^{2}}{(\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h})^{2}} - \frac{2\mathbf{g}_{\mathrm{p}}}{\sqrt{\mathbf{R}_{\mathrm{M}}\mathbf{R}_{\mathrm{N}}} + \mathbf{h}} \right] \delta \mathbf{r}_{\mathrm{D}} - \frac{2\mathbf{v}_{\mathrm{N}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{v}_{\mathrm{N}} - 2\left(\omega_{\mathrm{e}}\cos\varphi + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{N}} + \mathbf{h}}\right) \delta \mathbf{v}_{\mathrm{E}} - \mathbf{f}_{\mathrm{E}}\phi_{\mathrm{N}} + \mathbf{f}_{\mathrm{N}}\phi_{\mathrm{E}} + \delta \mathbf{f}_{\mathrm{D}}$$

$$(7.60)$$

$$(7.61)$$

式(7.58)即捷联惯导速度误差微分方程,反映了速度误差随时间的变化规律,等式 右边的是导致惯导速度误差的各项加速度偏差,其含义解释如下: $C_b^n \delta f^b$ 是加速度计的 比力测量误差在 n 系下的投影,是加速度计零偏、比例因子误差和噪声等误差的总和, 对速度的影响是显然的; fⁿ × ϕ 是将加速度计的比力测量值 f^b 从 b 系投影变换至 n 系 时,由姿态误差 ϕ 导致的投影变换误差;第6章6.3.2.3小节指出,选择 n 系为参考坐标 系进行导航,只有在加速度计输出的比力中扣除有害加速度后才能获得几何运动加速 度,其中有害加速度包括重力加速度、对地向心加速度和哥氏加速度,式中 δg_p^n 为重力 加速度补偿不精确导致的加速度误差; $-(2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta v^n$ 和 $v^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n)$ 分别 为由于角速度误差和速度误差导致的对地向心加速度和哥氏加速度的计算误差。

7.2.3 位置误差微分方程

惯导位置误差可以表示为纬度 φ 、经度 λ 和高程 h 的偏差,也可以表示为 n 系下的位置误差向量 $\delta \mathbf{r}^{n}$,如式 (7.8a) 所定义。下面推导这两种形式的位置误差方程。

7.2.3.1 位置误差方程 δp

分别对式(6.232a)~式(6.232c)中的纬度、经度和高程微分方程式求偏导,考虑到式 中 R_M 和 R_N 受位置误差的影响几乎可以忽略不计,近似为常值,可得

$$\delta \dot{\varphi} = -\frac{\mathbf{v}_{\mathrm{N}}}{(\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h})^2} \delta \mathbf{h} + \frac{1}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{v}_{\mathrm{N}}$$
(7.62)

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{v_{\rm E}\tan\varphi}{(R_{\rm N}+h)\cos\varphi}\delta\varphi - \frac{v_{\rm E}}{(R_{\rm N}+h)^2\cos\varphi}\delta h + \frac{1}{(R_{\rm N}+h)\cos\varphi}\delta v_{\rm E}$$
(7.63)

$$\delta \dot{\mathbf{h}} = -\delta \mathbf{v}_{\mathrm{D}} \tag{7.64}$$

式 (7.62)、式 (7.63) 和 (7.64) 即为纬度、经度和高程的误差微分方程。

7.2.3.2 位置误差方程 δrⁿ

e 系下的位置更新方程可写作,

$$\mathbf{r}^{\mathrm{e(t)}} = \mathbf{r}^{\mathrm{e(0)}} + \int_0^t \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}}(\tau) \mathbf{v}^{\mathrm{n}}(\tau) \mathrm{d}\tau$$
(7.65)

式中, t 为时间变量, $\mathbf{r}^{e(t)}$ 为载体位置向量在 t 时刻 e 系下的笛卡尔直角坐标; \mathbf{C}_n^e 为位置矩阵(A.21), 是纬度和经度的函数。在实际计算时

$$\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{e(t)}} = \hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{e(t_0)}} + \int_0^t \hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}}(\tau) \hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{n}}(\tau) \mathrm{d}\tau$$
(7.66)

根据7.2节的位置矩阵扰动误差分析,实际计算的位置矩阵表示为式(7.35),重写如下:

$$\hat{\mathbf{C}}_{n}^{e} = \mathbf{C}_{n}^{e} \left[\mathbf{I}_{3} + (\delta \boldsymbol{\theta} \times) \right]$$
(7.67)

将式 (7.67) 代入式 (7.66),得

$$\mathbf{r}^{\mathrm{e}(\mathrm{t})} + \delta \mathbf{r}^{\mathrm{e}(\mathrm{t})} = \mathbf{r}^{\mathrm{e}(\mathrm{t}_{0})} + \delta \mathbf{r}^{\mathrm{e}(\mathrm{t}_{0})} + \int_{0}^{\mathrm{t}} \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}} (\mathbf{v}^{\mathrm{n}} + \delta \mathbf{v}^{\mathrm{n}}) \mathrm{d}\tau$$

$$= \mathbf{r}^{\mathrm{e}(\mathrm{t}_{0})} + \delta \mathbf{r}^{\mathrm{e}(\mathrm{t}_{0})} + \int_{0}^{\mathrm{t}} \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} \left[\mathbf{I}_{3} + (\delta \boldsymbol{\theta} \times) \right] (\mathbf{v}^{\mathrm{n}} + \delta \mathbf{v}^{\mathrm{n}}) \mathrm{d}\tau$$
(7.68)

经整理,可得

$$\delta \mathbf{r}^{\mathrm{e(t)}} = \delta \mathbf{r}^{\mathrm{e(t_0)}} + \int_0^t \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} \delta \mathbf{v}^{\mathrm{n}} + \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} (\delta \boldsymbol{\theta} \times) \mathbf{v}^{\mathrm{n}} \mathrm{d}\tau$$
(7.69)

已知位置误差转换关系式

$$\delta \mathbf{r}^{n} = \mathbf{C}_{e}^{n} \delta \mathbf{r}^{e} \tag{7.70}$$

对等式(7.70)两边求导,并根据姿态矩阵微分方式(6.35),可得

$$\delta \dot{\mathbf{r}}^{n} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{n} \delta \mathbf{r}^{\mathrm{e}})}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{e}}^{n} \delta \mathbf{r}^{\mathrm{e}} + \mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{n} \frac{\mathrm{d}(\delta \mathbf{r}^{\mathrm{e}})}{\mathrm{dt}}$$
$$= \mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{n} (-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{e}} \times) \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} \delta \mathbf{r}^{\mathrm{n}} + \mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} [\mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} \delta \mathbf{v}^{\mathrm{n}} + \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} (\delta \boldsymbol{\theta} \times) \mathbf{v}^{\mathrm{n}}]$$
$$= -\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}} \times \delta \mathbf{r}^{\mathrm{n}} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}^{\mathrm{n}} + \delta \mathbf{v}^{\mathrm{n}}$$
(7.71)

将式(7.36)和式(3.17)代入式(7.71),展开为

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{N}} = -\frac{\mathbf{v}_{\mathrm{D}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{N}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{M}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{D}} + \delta \mathbf{v}_{\mathrm{N}}$$
(7.72)

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{E}} = \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}} \tan \varphi}{\mathbf{R}_{\mathrm{N}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}} - \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{D}} + \mathbf{v}_{\mathrm{N}} \tan \varphi}{\mathbf{R}_{\mathrm{N}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{E}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{E}}}{\mathbf{R}_{\mathrm{N}} + \mathbf{h}} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{D}} + \delta \mathbf{v}_{\mathrm{E}}$$
(7.73)

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{D}} = \delta \mathbf{v}_{\mathrm{D}} \tag{7.74}$$

式(7.71)反映了惯导位置误差随时间的变化规律,方程等号右边的各项是造成惯导 位置偏差的各项速度误差源,其含义解释如下:n系下的速度误差 $\delta \mathbf{v}^n$ 显然会导致位置 误差; $\delta \boldsymbol{\theta}$ 反映 e 到 n 系的姿态误差, $\delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}^n$ 是姿态误差导致的速度向量 v 的投影误 差; $-\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \delta \mathbf{r}^n$ 是由于位置向量 r 不准确而造成的,由 n 系相对 e 系旋转产生的线速 度误差。

7.3 静基座惯导误差传播分析

捷联惯导的误差传播本质上是一个复杂的时变系统,导航误差与载体的运动轨迹 密切相关,一般情况下无法得到惯导误差微分方程的时域解析解,只能通过数值仿真的 方法进行定量分析。但是,当惯导处于静止状态下,其误差的传播变得相对简单,作适 当简化后退化成了线性定常系统,可求得惯导误差微分方程组的时域解析表达式。这有 助于加深对惯导误差传播规律的认识,并作定量分析。本节对静基座误差传播作了一定 的简化,只保留和解释了舒勒周期这一惯导的最本质特征。更全面的静基座惯导误差和 可观性分析可参考[12,第4.3节]或[43,第13章]。值得注意的是,舒勒周期只有在导航 级或更高精度的惯导误差传播中才能观察到,对于低精度惯导,这种微弱的信号被传感 器误差导致的导航误差所淹没。

7.3.1 静基座误差方程

为了分析惯性导航系统的基本误差特性,假设载体相对地面静止,位置精确已知,将地球由椭球状简化为球形,子午圈半径 R_M和卯酉圈半径 R_N 近似为球形地球模型半径 R;当地重力加速度的模值记为 g,此时有

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{n} = 0 \\ \mathbf{f}^{n} = -\mathbf{g}_{p}^{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^{\top} \\ R_{M} = R_{N} \approx R \end{cases}$$
(7.75)

将式(7.75)代入等式 (7.52)~式 (7.54)、(7.59)~式 (7.61) 和 (7.72)~式 (7.74) 等号 右边,则惯导误差微分方程简化为:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{N} = \omega_{ie,D}^{n} \delta r_{N}/R + \delta v_{E}/R + \omega_{ie,D}^{n} \phi_{E} - \delta \omega_{ib,N}^{n} \\ \dot{\phi}_{E} = -\delta v_{N}/R - \omega_{ie,D}^{n} \phi_{N} + \omega_{ie,N}^{n} \phi_{D} - \delta \omega_{ib,E}^{n} \\ \dot{\phi}_{D} = -\omega_{ie,N}^{n} \delta r_{N}/R - \tan \varphi \delta v_{E}/R - \omega_{ie,N}^{n} \phi_{E} - \delta \omega_{ib,D}^{n} \\ \delta \dot{v}_{N} = 2\omega_{ie,D}^{n} \delta v_{E} + g\phi_{E} + \delta f_{N} \\ \delta \dot{v}_{E} = -2\omega_{ie,D}^{n} \delta v_{N} + 2\omega_{ie,N}^{n} \delta v_{D} - g\phi_{N} + \delta f_{E} \\ \delta \dot{r}_{N} = \delta v_{N} \\ \delta \dot{r}_{E} = \delta v_{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_{D} = 2g\delta r_{D}/R - 2\omega_{ie,N}^{n} \delta v_{E} + \delta f_{D} \\ \delta \dot{r}_{D} = \delta v_{D} \end{cases}$$

$$(7.77)$$

式中, $\omega_{ie,N}^{n}$ 和 $\omega_{ie,D}^{n}$ 分别为 ω_{ie}^{n} 的北向和垂向分量,见式(7.12)。方程组(7.76)和(7.77)分 别为简化后的水平通道和高程通道。

7.3.2 简化的水平通道误差传播

在式 (7.76) 中,如果令 $\delta v_E = 0$, $\phi_N = \phi_D = 0$,则可得到由 δr_N 、 δv_N 和 $\phi_E 3$ 个 状态构成的简化的水平北向通道。如果令 $\delta v_N = 0$, $\delta v_D = 0^4$,且 $\phi_D = 0$,则可以得到 δr_E 、 δv_E 和 $\phi_N 3$ 个状态构成的简化的水平东向通道。

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{\rm E} = -\frac{1}{\rm R} \delta v_{\rm N} - \delta \omega_{\rm ib,E}^{\rm n} \\ \delta \dot{v}_{\rm N} = {\rm g} \phi_{\rm E} + \delta {\rm f}_{\rm N} \\ \delta \dot{r}_{\rm N} = \delta v_{\rm N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{\rm N} = \frac{1}{\rm R} \delta v_{\rm E} - \delta \omega_{\rm ib,N}^{\rm n} \\ \delta \dot{v}_{\rm E} = -{\rm g} \phi_{\rm N} + \delta {\rm f}_{\rm E} \\ \delta \dot{r}_{\rm E} = \delta v_{\rm E} \end{cases}$$

$$(7.78)$$

下面以水平北向通道为例阐述惯导误差特性分析的基本方法,并介绍惯导误差的基本特性。进一步假设东向陀螺误差和北向加速度计误差均为常值,即 $\delta\dot{\omega}_{ib,E}^{n} = 0, \delta f_{N} = 0.$ 定义以下误差状态向量:

$$\delta \mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}} & \delta \mathbf{v}_{\mathrm{N}} & \phi_{\mathrm{E}} & \delta \mathbf{f}_{\mathrm{N}} & \delta \omega_{\mathrm{ib,E}}^{\mathrm{n}} \end{bmatrix}^{\top}$$
(7.80)

⁴注意:这样简化后只保留了纯粹的舒勒周期项,如果不做这个简化,则可以分析出傅科周期和地球自 转周期等调制项。但对普通应用,使用时长远小于这两个周期长度,故本节只以舒勒周期为例阐述误差 分析的方法。

7.3 静基座惯导误差传播分析

则式 (7.78) 可写成如下形式:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_{N}(t) = \mathbf{F}_{N(t)} \delta \mathbf{x}_{N}(t) \tag{7.81}$$

其中

式(7.81)是一组常微分方程,可用拉普拉斯变换方法求得 $\delta \mathbf{x}_{N(t)}$ 的时域解析解:

$$\delta \mathbf{x}_{\mathrm{N(t)}} = \mathbf{L}^{-1} \left[(\mathbf{s} \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \delta \mathbf{x}_{\mathrm{N(0)}} \right]$$
(7.83)

式中, s 为拉普拉斯算子, \mathbf{L}^{-1} 为拉普拉斯逆变换, $\delta \mathbf{x}_{N(0)}$ 为相应的初值。其中, 北向位置误差的解为:

$$\delta \mathbf{r}_{\mathrm{N}}(\mathbf{t}) = \delta \mathbf{r}_{\mathrm{N},0} + \frac{\sin \omega_{\mathrm{s}} \mathbf{t}}{\omega_{\mathrm{s}}} \delta \mathbf{v}_{\mathrm{N},0} + \mathbf{R}(1 - \cos \omega_{\mathrm{s}} \mathbf{t})\phi_{\mathrm{E}} + \frac{1 - \cos \omega_{\mathrm{s}} \mathbf{t}}{\omega_{\mathrm{s}}^{2}} \delta \mathbf{f}_{\mathrm{N}} + \mathbf{R}(\frac{\sin \omega_{\mathrm{s}} \mathbf{t}}{\omega_{\mathrm{s}}} - \mathbf{t})\delta \omega_{\mathrm{ib,E}}^{\mathrm{n}}$$
(7.84)

式中, $\delta r_{N,0}$ 为初始北向位置误差, $\delta v_{N,0}$ 为初始北向速度误差, $\omega_s = \sqrt{g/R}$ 为舒勒 (Schuler)角频率。等式右边第 2~5 项均为周期项,其周期为 $T_s = 2\pi/\omega_s$ 。若取数值 $g = 9.8 \text{ m/s}^2 \ \pi R = 6371 \text{ km}$,易得舒勒周期 $T_s \approx 84.4 \text{ min}$ 。

根据式 (7.84),可画出各误差项的曲线。例如,假设载体所在位置的纬度 $\varphi = 30^{\circ}$,初始速度误差 $\delta v_{N,0} = 0.1 \text{ m/s}$,等效北向加速度计常值零偏 $\delta f_N = 10 \text{ mGal}$,常值俯仰 角误差 $\phi_E = 5''$,等效东向陀螺常值零偏 $\delta \omega^n_{ib,E} = 0.01^{\circ}/h^5$ 。将上述假设代入式 (7.84), 可得等式右边 2-5 误差项的曲线,如图7.2所示。将典型导航级惯导的陀螺和加速度计 零偏参数 (假设为常值)代入式(7.84),可定量评估静基座条件下导航级惯导独立工作 1 小时后的累积误差,回答本章开头提到的问题。

对式 (7.78) 中北向速度误差求二阶导数,易得

$$\delta \ddot{\mathbf{v}}_{\mathrm{N}} + \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}} \delta \mathbf{v}_{\mathrm{N}} = -\mathrm{g} \delta \omega_{\mathrm{ib,E}}^{\mathrm{n}} \tag{7.85}$$

可见,北向速度误差与俯仰角误差耦合在一起形成一个无阻尼二阶振荡系统⁶,由 上述非齐次线性二阶微分方程描述,解上述微分方程可得系统振荡周期约为 84 min,即 舒勒周期。这说明惯性导航系统具有舒勒摆特性,这是惯性导航系统最本质的特征,实 际上早期的平台式惯导其惯性平台就是一个物理上能实现的舒勒摆。

⁵典型导航级惯导的误差水平。

⁶类比单摆的简谐振动微分方程式 $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$,其中 g 为当地重力值, l 为摆长。



图 7.2 各误差源对北向位置误差的影响

图7.3为与式 (7.78)等效的控制系统结构图,很明显存在一个闭环回路。沿该环路转一圈,只碰到1个负号(即奇数个负号),因此可以判断该闭环为负反馈;环路中存在两个积分环节,因此是二阶系统,存在振荡的可能性;由于环路中没有阻尼项,因此在常值误差激励下,会形成等幅振荡,而如果误差中包含白噪声等随机误差,对系统不断注入能量。舒勒调谐是一个根源于"地球表面是球面"这一事实而形成的微弱负反馈回路,它能够显著减缓惯导误差的发散速率。但需要注意的是,舒勒调谐只会出现在导航级等高精度惯导系统中;而对于低精度惯导,其陀螺误差的幅度会远大于图7.3中的角速度反馈项,从而使得负反馈闭环的作用微乎其微。



图 7.3 水平北向通道舒勒回路

7.3.3 高程通道误差传播

高程通道微分方程组重写如下:

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{D}} = -2\mathrm{g}\delta \mathrm{h}/\mathrm{R} - 2\omega_{\mathrm{ie,N}}^{\mathrm{n}}\delta \mathrm{v}_{\mathrm{E}} + \delta \mathrm{f}_{\mathrm{D}} \\ \delta \dot{\mathrm{h}} = -\delta \mathrm{v}_{\mathrm{D}} \end{cases}$$
(7.86)

求 δh 的二阶导,得

$$\delta \ddot{\mathbf{h}} = -\delta \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{D}} = 2\mathrm{g}\delta \mathrm{h}/\mathrm{R} + 2\omega_{\mathrm{ie,N}}^{\mathrm{n}}\delta \mathbf{v}_{\mathrm{E}} - \delta \mathbf{f}_{\mathrm{D}}$$
(7.87)

利用拉普拉斯变换方法求解上述微分方程,假设 $\delta h(t_0) = \delta h_0$, $\delta v_D(t_0) = \delta v_{D0}$, δf_D 均为常值。易得 $\delta h(t)$ 的时域解析表达式为

$$\delta h(t) = \delta h_0 \cosh(\sqrt{2}\omega_s t) + \frac{\delta v_{D0}}{\sqrt{2}\omega_s} \sinh(\sqrt{2}\omega_s t) + \frac{2\omega_{ie,N}^n \delta v_E - \delta f_D}{2\omega_s^2} \left[\cosh(\sqrt{2}\omega_s t) - 1\right]$$
(7.88)

式中, sinh 和 cosh 分别为双曲正弦和双曲余弦函数⁷。由此可见,初始高度误差 δh_0 、初始垂向速度误差 δv_{D0} 、等效垂向加速度计常值零偏 δf_D 和东向速度误差 δv_E 都使得高程误差不断累积,呈指数发散。这说明,惯性导航系统的高程通道是不稳定的,而且误差发散速度很快。纯惯导的高程通道不能长时间单独使用,必须借助外部辅助设备提供高程修正,例如 GNSS 或气压高程计。

在短时间内 (例如十几分钟), 将 ω_{st} 看作小量, 则 $\cosh(\sqrt{2}\omega_{s}t) \approx 1$, $\sinh(\sqrt{2}\omega_{s}t) \approx \sqrt{2}\omega_{s}t$, $\cosh(\sqrt{2}\omega_{s}t) - 1 \approx \omega_{s}^{2}t^{2}$ 。因此, 式 (7.88) 可简化为

$$\delta \mathbf{h}(\mathbf{t}) = \delta \mathbf{h}_0 + \delta \mathbf{v}_{\mathrm{D}0} \mathbf{t} + \omega_{\mathrm{ie,N}}^{\mathrm{n}} \delta \mathbf{v}_{\mathrm{E}} \mathbf{t}^2 - \frac{1}{2} \delta \mathbf{f}_{\mathrm{D}} \mathbf{t}^2$$
(7.89)

可见,在短时间内高程误差近似为垂向加速度计误差的二次积分结果。

 $^{^{7}\}sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

第8章 INS/GNSS 组合导航

8.1 引言

如第3章3.5.5小节所述,惯性导航系统具有诸多优点:自主性和隐蔽性好;设备故障率低;导航信息丰富,能够提供位置、速度、姿态、角速度、加速度等多种导航参数; 采样率高(典型可达 200Hz 以上),动态跟踪和响应能力强。然而,惯导的精度随时间发散,且必须由外界提供初始位置和速度等初始化信息,否则无法启动。GNSS 可以提供全球、全天时、全天候高精度三维位置和速度信息,精度不随时间发散。然而,相比惯导而言,GNSS 定位具有脆弱性,卫星信号易被干扰和遮挡,导致定位精度降低,甚至无法定位;且 GNSS 的数据率一般较低,导航型接收机的典型采样率为 1~10Hz;标准的 GNSS 只能提供位置和速度,无法测姿,导航信息不如 INS 丰富。

INS 和 GNSS 误差特性存在显著差异,且原始测量的类型不同,它们的优缺点是 互补的,组合后比其中任何一个独立系统都具有更好的性能:GNSS 能有效抑制 INS 的误差累积,INS 对 GNSS 导航结果的噪声进行了平滑并弥补了其定位中断的问题。 INS/GNSS 能够提供连续无缝、高数据率、长时和短时精度均较高的导航参数。INS 与 GNSS 组合是诸多组合导航系统中最常用、最成功的一种。

INS/GNSS 组合导航按信息融合的层次可分为松组合 (loosely-coupled integration)、 紧组合 (tightly-coupled integration) 和深组合 (deeply-coupled integration) 三种主要 类型。深组合是在接收机底层导航信号处理层面的最深层次的组合,本书不涉及。松组 合和紧组合都是 GNSS 和 INS 在数据处理层面的组合,如图8.1所示。





松组合是 GNSS 的导航定位结果与惯导的组合,GNSS 解算的位置和速度结果与 INS 推算的位置和速度对比,求差后作为组合导航滤波器的观测输入,用于估计 INS 导 航误差和惯性传感器误差,对惯导机械编排的位置、速度和姿态进行校正,估计的惯性 传感器误差反馈至机械编排前端补偿 IMU 原始测量误差。紧组合是 GNSS 的原始观测 与惯导的组合,导航滤波器的观测输入是 GNSS 的伪距、伪距率、多普勒及载波相位等 数据,据此估计 INS 误差、惯性传感器误差和 GNSS 接收机的时钟偏差与漂移。因此, 紧组合是 INS 与 GNSS 在原始观测域的组合,组合层次比松组合更深。松组合和紧组 合导航输出的结果均为经过校正后的惯导结果。

在 GNSS 观测条件良好的情况下, 松组合和紧组合在导航精度上没有显著差异。然而, 当 GNSS 信号被部分遮挡, 没有足够的卫星观测量进行 GNSS 独立定位时, 松组 合将会退化为纯 INS 推算模式, 而紧组合仍能把有限的 GNSS 原始观测数据用于辅助 惯导,获得相应的辅助效果。

本章以面向通用场景的 INS/GNSS 组合导航为例,设计松组合和紧组合算法:阐述如何以惯导为主线构建系统方程,以 GNSS 定位或测速结果(松组合)或 GNSS 原始观测(紧组合)为观测信息构建观测方程,调用卡尔曼滤波(Kalman filter, KF)算法实现 INS 和 GNSS 信息融合和参数的最优估计。本章内容不涉及基于 GNSS 载波相位观测的精密定位的紧组合算法,因为 GNSS 精密定位本身就需要单独一本书才能讲清楚。读者在掌握了 GNSS 精密定位算法的情况下,不难根据本书内容设计出相应的精密定位紧组合算法。

8.2 卡尔曼滤波

卡尔曼滤波算法作为一种重要的最优估计方法被广泛应用于各个领域,组合导航系统的算法设计是其中之一。卡尔曼滤波有离散型和连续型两种形式,前者可直接在数字计算机上实现,后者更常用于卡尔曼滤波的理论性能分析。在此只介绍实现 GNSS/INS 组合导航解算的离散卡尔曼滤波。

假设离散线性系统 t_k 时刻的系统状态 \mathbf{x}_k 受系统噪声序列 \mathbf{w}_{k-1} 驱动,系统状态方程及量测方程均为系统状态量的线性方程¹:

$$\mathbf{x}_{k} = \mathbf{\Phi}_{k/k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}$$
(8.1)

$$\mathbf{z}_{k} = \mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k} + \mathbf{v}_{k} \tag{8.2}$$

式中,下标 k – 1 和 k 分别表示时刻 t_{k-1} 和 t_k, x 表示状态向量 (n×1); $\Phi_{k/k-1}$ 为 t_{k-1} 至 t_k 的状态一步转移矩阵 (n×n); Γ_{k-1} 为系统噪声驱动阵 (n×s); z_k 为 t_k 时刻 的观测向量 (m×1); **H**_k 为观测矩阵 (m×n); w_{k-1} 为系统噪声² (s×1), v_k 为量测噪

¹未考虑确定性控制输入项。

²系统噪声项是反映从 t_{k-1} 到 t_k 的系统噪声影响,因此其下标可以用 k 或 k – 1,本书选择 k – 1。

声 $(m \times 1)$ 。要求 \mathbf{w}_k 与 \mathbf{v}_k 是互不相关的零均值白噪声序列,即满足:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{k} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_{k}\right) \\ \mathbf{v}_{k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{k}) \\ \mathrm{E}\left(\mathbf{w}_{k} \mathbf{v}_{j}^{\top}\right) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$(8.3)$$

式中, $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ 为系统状态噪声协方差阵, $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}$ 为量测噪声协方差阵。

在一个滤波周期内,卡尔曼滤波的信息更新过程可以分为时间更新过程和量测更 新过程。其中时间更新又被称为预测,状态向量及其协方差阵的一步预测为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \mathbf{\Phi}_{k/k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \tag{8.4}$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{\Phi}_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{\Phi}_{k/k-1}^{\top} + \mathbf{\Gamma}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{\Gamma}_{k-1}^{\top}$$
(8.5)

式中, $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ 为 t_k 时刻的状态向量预测值, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 为前一时刻 t_{k-1} 状态向量的最优估计。 $\mathbf{P}_{k/k-1}$ 为当前时刻 t_k 的状态最优估计的协方差阵的预测值, \mathbf{P}_{k-1} 为前一时刻 t_{k-1} 的协方差阵最优估计。

在量测更新过程中首先计算增益矩阵 K,然后更新系统状态 x 及误差协方差阵 P。 当 Q_k 非负定, R_k 为正定阵时, x_k 的最优估值 \hat{x}_k 可按下述方程求解:

$$\mathbf{K}_{k} = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_{k}^{\top} (\mathbf{H}_{k} \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_{k}^{\top} + \mathbf{R}_{k})^{-1}$$

$$(8.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_{k}(\mathbf{z}_{k} - \mathbf{H}_{k}\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})$$
(8.7)

$$\mathbf{P}_{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k} \mathbf{H}_{k}) \mathbf{P}_{k/k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k} \mathbf{H}_{k})^{\top} + \mathbf{K}_{k} \mathbf{R}_{k} \mathbf{K}_{k}^{\top}$$
(8.8)

式 (8.4)~式 (8.8) 即离散型卡尔曼滤波的基本方程,只要给定初值 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和 \mathbf{P}_0 ,根据 t_k 时刻的量测就可递推计算任意时刻 t_k 的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。其中 \mathbf{P}_k 有多种等价的表达式,式 (8.8) 被称为 Joseph 形式,能保证 **P** 阵的对称性和正定性。虽然很多物理系统是连续系统,但只要合理离散化就能使用离散型卡尔曼滤波的基本方程。

8.3 INS/GNSS 松组合算法设计

完整的组合导航算法设计通常涉及状态向量的选择、系统方程和观测方程的推导、 滤波方差分析和仿真分析、系统噪声和观测噪声的建模、状态初始化和卡尔曼滤波调参 等内容。本章仅阐述系统模型和观测模型的构建,在此基础上,使用卡尔曼滤波的基本 方程进行组合导航解算。

8.3.1 系统方程

INS/GNSS 松组合常采用误差状态形式,状态向量定义为

$$\delta \mathbf{x}_{21 \times 1} (\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \delta \mathbf{r}^{n} \\ \delta \mathbf{v}^{n} \\ \boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{b}_{g} \\ \mathbf{b}_{a} \\ \delta \mathbf{s}_{g} \\ \delta \mathbf{s}_{a} \end{vmatrix}$$
(8.9)

式中, $\delta \mathbf{r}^{n}$ 、 $\delta \mathbf{v}^{n}$ 和 ϕ 分别是惯导的位置、速度和姿态误差,定义见第7章7.2节; \mathbf{b}_{g} 、 \mathbf{b}_{a} 分别为三轴陀螺和三轴加速度计的零偏误差向量, $\delta \mathbf{s}_{g}$ 和 $\delta \mathbf{s}_{a}$ 分别为陀螺和加速度计的三轴比例因子误差向量,定义见第4章4.2.7小节。向量 $\delta \mathbf{x}$ 中的各分量均为时间的函数,为书写方便,省略了时间变量符号 t。

式 (8.9) 中各项都是惯导的导航状态误差或惯性传感器误差,又称作误差状态向量。 误差状态向量的选择是组合导航滤波器设计的一个关键步骤,与具体应用和组合结构的 选择有关,对状态向量的选择还需要进行误差的可观性分析,如果某个误差状态可观性 差或不可观,将其作为状态量进行估计则没有意义甚至带来负作用。本章不对状态向量 的选择和可观性分析进行讨论,读者可查阅参考文献[2]第 14.2 节深入学习。式(8.9)是 通用的 INS/GNSS 组合导航系统较为常用的一组状态向量。

8.3.1.1 连续时间系统方程

为得到系统状态方程,必须先求 δ**x**(t) 关于时间的导数,得到连续时间系统状态微 分方程,写作如下形式:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t)$$
(8.10)

式中, $\mathbf{w}(t)$ 为系统噪声向量, $\mathbf{F}(t)$ 为系统矩阵, $\mathbf{G}(t)$ 为系统噪声分布矩阵。对 $\delta \mathbf{x}(t)$ 向 量求导要求对向量的各分量分别对时间 t 求导,其中位置、速度和姿态误差导数即7.2节 推导的惯导误差方程式(7.51)、式(7.58)和式(7.71),重写如下:

$$\delta \dot{\mathbf{r}}^{n} = -\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} \times \delta \mathbf{r}^{n} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}^{n} + \delta \mathbf{v}^{n}$$
(8.11a)

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^{n} = \mathbf{C}_{b}^{n} \delta \mathbf{f}^{b} + \mathbf{f}^{n} \times \boldsymbol{\phi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) \times \delta \mathbf{v}^{n} + \mathbf{v}^{n} \times (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}) + \delta \mathbf{g}_{p}^{n} \qquad (8.11b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n} \times \boldsymbol{\phi} + \delta \boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n} - \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \delta \boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b}$$

$$(8.11c)$$

惯性传感器的零偏及比例因子误差对时间求导的含义是:用一个随机模型来描述它 们随时间的变化情况;通常建模为一阶高斯马尔可夫过程或随机游走,本章选用前者, 其连续时间微分方程为

$$\dot{\mathbf{b}}_{g}(t) = -\frac{1}{T_{gb}}\mathbf{b}_{g}(t) + \mathbf{w}_{gb}(t)$$
(8.11d)

$$\dot{\mathbf{b}}_{a}(t) = -\frac{1}{T_{ab}} \mathbf{b}_{a}(t) + \mathbf{w}_{ab}(t)$$
(8.11e)

$$\delta \dot{\mathbf{s}}_{g}(t) = -\frac{1}{T_{gs}} \delta \mathbf{s}_{g}(t) + \mathbf{w}_{gs}(t)$$
(8.11f)

$$\delta \dot{\mathbf{s}}_{a}(t) = -\frac{1}{T_{as}} \delta \mathbf{s}_{a}(t) + \mathbf{w}_{as}(t)$$
(8.11g)

式中, T_{gb} 、 T_{ab} 、 T_{gs} 和 T_{as} 为一阶高斯马尔可夫过程的相关时间, $\mathbf{w}_{gb}(t)$ 、 $\mathbf{w}_{ab}(t)$ 、 $\mathbf{w}_{gs}(t)$ 和 $\mathbf{w}_{as}(t)$ 为一阶高斯马尔可夫过程的驱动白噪声,详见第2章2.4.3.4小节。式(8.11b)和式(8.11c)中 $\delta \mathbf{f}^{b}$ 和 $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ 分别表示加速度计和陀螺测量值的总误差,根据第4章4.2.7小节的惯性传感器误差模型和误差状态量(8.9),应该展开为

$$\delta \mathbf{f}^{\mathrm{b}} = \mathbf{b}_{\mathrm{a}} + \operatorname{diag}\left(\mathbf{f}^{\mathrm{b}}\right) \delta \mathbf{s}_{\mathrm{a}} + \mathbf{w}_{\mathrm{a}}$$

$$(8.11h)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \mathbf{b}_{g} + \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\right) \delta \mathbf{s}_{g} + \mathbf{w}_{g}$$
(8.11i)

式中, \mathbf{w}_{a} 和 \mathbf{w}_{g} 分别为加速度计和陀螺的随机噪声。将7.2节惯导误差方程(7.51)、(7.58)、(7.71)、(8.11a)~(8.11i)代入式(8.10)、可得 $\mathbf{G}(t)$ 、 $\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{F}(t)$ 的具体表达式³

$$\mathbf{G}_{21\times18} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} & \mathbf{I}_{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{18\times1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\mathrm{a}} \\ \mathbf{w}_{\mathrm{g}} \\ \mathbf{w}_{\mathrm{gb}} \\ \mathbf{w}_{\mathrm{ab}} \\ \mathbf{w}_{\mathrm{gs}} \\ \mathbf{w}_{\mathrm{as}} \end{bmatrix}$$
(8.12)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\rm rr} & \mathbf{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{F}_{\rm vr} & \mathbf{F}_{\rm vv} & [(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \mathbf{f}^{\rm b}) \times] & 0 & \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} & 0 & \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \text{diag}(\mathbf{f}^{\rm b}) \\ \mathbf{F}_{\phi \rm r} & \mathbf{F}_{\phi \rm v} & -(\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n} \times) & -\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} & 0 & -\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{\rm gb}} \mathbf{I}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{\rm ab}} \mathbf{I}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{\rm gs}} \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{\rm gs}} \mathbf{I}_3 & 0 \end{bmatrix}$$
(8.13)

³注意,系统噪声不能随意加入,而应该根据系统状态方程的推导式确定。例如位置误差微分方程中没 有包含传感器误差,则一般情况下不应该在位置误差分量上加入系统噪声。

式中,

$$\mathbf{F}_{\rm rr} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{\rm D}}{R_{\rm M} + h} & 0 & \frac{v_{\rm N}}{R_{\rm M} + h} \\ \frac{v_{\rm E} \tan \varphi}{R_{\rm N} + h} & -\frac{v_{\rm D} + v_{\rm N} \tan \varphi}{R_{\rm N} + h} & \frac{v_{\rm E}}{R_{\rm N} + h} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\phi v} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{\rm N} + h} & 0 \\ -\frac{1}{R_{\rm M} + h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan \varphi}{R_{\rm N} + h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{vr} = \begin{bmatrix} \frac{-2v_E\omega_e\cos\varphi}{R_M + h} - \frac{v_E^2\sec^2\varphi}{(R_M + h)(R_N + h)} & 0 & \frac{v_Nv_D}{(R_M + h)^2} - \frac{v_E^2\tan\varphi}{(R_N + h)^2} \\ \left(\frac{2\omega_e(v_N\cos\varphi - v_D\sin\varphi)}{R_M + h}\right) & 0 & \frac{v_Ev_D + v_Nv_E\tan\varphi}{(R_N + h)^2} \\ + \frac{v_Nv_E\sec^2\varphi}{(R_M + h)(R_N + h)} & 0 & \left(-\frac{v_E^2}{(R_N + h)^2} - \frac{v_N^2}{(R_M + h)^2}\right) \\ \frac{2\omega_ev_E\sin\varphi}{R_M + h} & 0 & \left(-\frac{v_E^2}{(R_N + h)^2} - \frac{v_N^2}{(R_M + h)^2}\right) \\ + \frac{2g_P}{\sqrt{R_MR_N} + h} & 0 \\ 2\omega_e\sin\varphi + \frac{v_E\tan\varphi}{R_N + h} & \frac{v_D + v_N\tan\varphi}{R_N + h}\right) & \frac{v_N}{R_M + h} \\ 2\omega_e\sin\varphi + \frac{v_E\tan\varphi}{R_N + h} & \frac{v_D + v_N\tan\varphi}{R_N + h} & 2\omega_e\cos\varphi + \frac{v_E}{R_N + h} \\ - \frac{2v_N}{R_M + h} & -2\left(\omega_e\cos\varphi + \frac{v_E}{R_N + h}\right) & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{\phi r} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_e\sin\varphi}{R_M + h} & 0 & \frac{v_E}{(R_M + h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R_M + h)^2} \\ -\frac{\omega_e\cos\varphi}{R_M + h} - \frac{v_E\sec^2\varphi}{(R_M + h)(R_N + h)} & 0 & -\frac{v_E\tan\varphi}{(R_N + h)^2} \end{bmatrix}$$

在实际解算时, $\mathbf{G}(t)$ 和 $\mathbf{F}(t)$ 中的位置、速度和姿态等参数一般用前一时刻的最优 估计值代入。连续时间系统噪声方差阵 $\mathbf{q}(t)$ (也称功率谱密度矩阵), 虽然写成时间 t 的 函数, 但一般情况下是常值矩阵, 由 IMU 传感器的误差模型参数决定。一般认为 IMU 中三轴陀螺性能一致, 三轴加速度计性能也一致, 则有

$$E\left[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^{\top}(\tau)\right] = \mathbf{q}(t)\delta(t-\tau)$$
(8.14)

式中,

$$\mathbf{q}_{18\times18}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{W}^{2}\mathbf{I}_{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{W}^{2}\mathbf{I}_{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_{gb}^{2}}{T_{gb}}\mathbf{I}_{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sigma_{ab}^{2}}{T_{ab}}\mathbf{I}_{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sigma_{gs}^{2}}{T_{gs}}\mathbf{I}_{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sigma_{as}^{2}}{T_{gs}}\mathbf{I}_{3} \end{bmatrix}$$
(8.15)

8.3.1.2 系统方程的离散化

为使用离散时间卡尔曼滤波的基本方程,须对式 (8.10) 进行离散化处理,包括推导 离散时间的状态一步转移矩阵 $\Phi_{k/k-1}$ 和驱动白噪声的等效离散化(得到 w_{k-1})。离散 化后的系统状态方程写作

$$\delta \mathbf{x}_{k} = \mathbf{\Phi}_{k/k-1} \delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \tag{8.16}$$

式中,

$$\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1} = \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t) dt\right)$$
(8.17)

$$\mathbf{w}_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\Phi}_{k/t} \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) dt$$
(8.18)

记离散化时间间隔 $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, 当 **F**(t) 在较短的积分区间 [t_{k-1} , t_k] 内变化不 太剧烈时, 且设 **F**(t_{k-1}) $\Delta t \ll I_n$, 则一步转移矩阵式 (8.17) 可近似为

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{k}/\mathbf{k}-1} = \exp\{\mathbf{F}(\mathbf{t}_{\mathbf{k}-1})\Delta t\} \approx \mathbf{I}_{\mathbf{n}} + \mathbf{F}(\mathbf{t}_{\mathbf{k}-1})\Delta t$$
(8.19)

式中, I_n 为 n 阶单位矩阵 (n 为状态向量 δx 的维度)。

式 (8.18) 表明 \mathbf{w}_{k-1} 是关于高斯白噪声 $\mathbf{w}(t)$ 的线性变换,其结果仍然是正态分布 的随机向量函数。容易证明

$$E[\mathbf{w}_{k-1}] = \mathbf{0} \tag{8.20}$$

$$\mathbf{w}_{k-1}$$
的二阶矩 $\mathbf{Q}_{k} = E[\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^{\top}]$
$$\mathbf{Q}_{k} = E\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{\Phi}_{k/t}\mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)dt\left[\int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{\Phi}_{k/\tau}\mathbf{G}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau\right]^{\top}\right\}$$
$$= \int_{t_{k-1}}^{t_{k}} \mathbf{\Phi}_{k/t}\mathbf{G}(t)\mathbf{q}(t)\mathbf{G}^{\top}(t)\mathbf{\Phi}_{k/t}^{\top}dt$$
(8.21)

从上述推导可知 \mathbf{w}_{k-1} 为白噪声序列,式 (8.16) 描述的等效离散系统满足离散型卡尔曼滤波的基本要求。同样,当 $\mathbf{G}(t)$ 在较短的积分区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 内变化不太剧烈时, \mathbf{Q}_k 可简化为梯形积分。

$$\mathbf{Q}_{k} \approx \frac{1}{2} \left[\mathbf{\Phi}_{k/k-1} \mathbf{G}(\mathbf{t}_{k-1}) \mathbf{q}(\mathbf{t}_{k-1}) \mathbf{G}^{\top}(\mathbf{t}_{k-1}) \mathbf{\Phi}_{k/k-1}^{\top} + \mathbf{G}(\mathbf{t}_{k}) \mathbf{q}(\mathbf{t}_{k}) \mathbf{G}^{\top}(\mathbf{t}_{k}) \right] \Delta t$$
(8.22)

8.3.2 观测方程

在 INS/GNSS 组合导航系统的误差状态卡尔曼滤波设计中,通过计算 GNSS 位置 和速度与 INS 机械编排的位置和速度之差来构建观测向量。该向量作为观测数据输入, 用于更新卡尔曼滤波状态。接下来推导观测值与状态向量之间的关系式,即组合导航的 观测模型。

8.3.2.1 GNSS 位置观测方程

GNSS 和 INS 的定位参考点分别是 GNSS 天线相位中心和 IMU 测量中心 (即 b 系 原点), 二者在空间中一般不重合。由 IMU 测量中心指向 GNSS 天线相位中心的向量称 为 GNSS 天线杆臂 (lever-arm), 记作 ℓ , 如图 8.2所示。天线相位中心的位置定义为地 心 O_e 指向天线相位中心的向量, 记作 $\mathbf{r}_{\rm G}$, 右下标 G 表示 GNSS 天线相位中心。IMU 测量中心的位置记作 $\mathbf{r}_{\rm I} = \mathbf{r}_{\rm eb}$, 右下标 I 代表 IMU 测量中心。INS/GNSS 组合导航计 算时, 需要将位置和速度归算到同一参考点, 如 GNSS 天线相位中心。根据图 8.2的几 何关系易得, $\mathbf{r}_{\rm G}$ 和 $\mathbf{r}_{\rm I}$ 之间的转换式为

$$\mathbf{r}_{\mathrm{G}} = \mathbf{r}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\ell} \tag{8.23}$$



图 8.2 GNSS 天线杆臂示意图

GNSS 天线杆臂向量 ℓ 在 b 系 (或 v 系)下的坐标 ℓ^{b} 通常可精确测量得到,误差可以忽略不计。由于 IMU 和 GNSS 天线都固定安装在载体上,且没有相对运动,因此

在 b 系下观察, ℓ 为常向量。即

$$\left. \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{dt}} \right|_{\mathrm{b}} = \mathbf{0} \tag{8.24}$$

方程(8.23)等号两边的向量均投影到 n 系4,有

$$\mathbf{r}_{\rm G}^{\rm n} = \mathbf{r}_{\rm I}^{\rm n} + \boldsymbol{\ell}^{\rm n} = \mathbf{r}_{\rm I}^{\rm n} + \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b}$$

$$(8.25)$$

惯导计算的 GNSS 天线相位中心的位置含有误差,记作

$$\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{n}} = \hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{n}} + \hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{b}} \tag{8.26}$$

将惯导位置误差和姿态误差定义式(7.8a)、式(7.8c)代入式(8.26),顾及式(8.25),整 理得

$$\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{n}} = \mathbf{r}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{n}} + \delta \mathbf{r}^{\mathrm{n}} + \left[\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)\right] \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{b}}$$

$$= \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{n}} + \delta \mathbf{r}^{\mathrm{n}} - (\boldsymbol{\phi} \times) \mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{b}}$$

$$= \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{n}} + \delta \mathbf{r}^{\mathrm{n}} + \left[\left(\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{b}}\right) \times\right] \boldsymbol{\phi}$$
(8.27)

GNSS 接收机测量的天线相位中心位置也含有误差,记作 $\tilde{\mathbf{r}}_{G}^{5}$,在 n 系下有

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\rm G}^{\rm n} = \mathbf{r}_{\rm G}^{\rm n} - \mathbf{n}_{\rm r} \tag{8.28}$$

式中, **n**_r 为 GNSS 的定位误差向量⁶,称作位置观测噪声。GNSS 定位误差通常简化为 高斯白噪声序列:

$$\mathbf{n}_{\mathrm{r,k}} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_{\mathrm{k}}), \quad \mathbf{R}_{\mathrm{k}} = E[\mathbf{n}_{\mathrm{r,k}}\mathbf{n}_{\mathrm{r,k}}^{\top}]$$
(8.29)

式中,右下标 k 表示时刻 t_k 。观测误差的方差阵 \mathbf{R}_k 一般可从 GNSS 定位解算软件中得到。

GNSS 位置的观测向量 $\delta \mathbf{z}_r$ 为 INS 推算的 GNSS 天线相位中心位置与 GNSS 实测 定位结果之差

$$\delta \mathbf{z}_{\rm r}^{\rm n} = \hat{\mathbf{r}}_{\rm G}^{\rm n} - \tilde{\mathbf{r}}_{\rm G}^{\rm n} \tag{8.30}$$

将式(8.27)和式(8.28)代入式(8.30),得

$$\delta \mathbf{z}_{\rm r}^{\rm n} \approx \delta \mathbf{r}^{\rm n} + (\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b}) \times \boldsymbol{\phi} + \mathbf{n}_{\rm r}$$
(8.31)

式(8.31)即 GNSS 位置观测方程,记作

$$\delta \mathbf{z}_{\rm r}^{\rm n} = \mathbf{H}_{\rm r} \delta \mathbf{x} + \mathbf{n}_{\rm r} \tag{8.32}$$

⁴如第2章2.2.3小节所述, n 系通常不用于表示载体位置的坐标, 此处只用于公式推导, 实际并不需要 明确写出它们在 n 系下的坐标。

⁵需要注意区分以下三个符号: \mathbf{r}_{G} 为 GNSS 天线相位中心的实际位置 (真值), $\tilde{\mathbf{r}}_{G}$ 是 GNSS 接收机给 出的 \mathbf{r}_{G} 测量值, $\hat{\mathbf{r}}_{G}$ 是惯导给出的 \mathbf{r}_{G} 计算值,后两者都含有误差。

⁶式中,观测噪声 **n**_r 前面的负号只是为了使得后面推导出来的观测方程中观测噪声符号为正。对于零 均值随机噪声没有正负差异,在组合导航时仅关注其方差。

$$\mathbf{H}_{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & [(\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{b}}) \times] & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$$
(8.33)

式中, I₃和 0₃分别表示三阶单位阵和三阶零矩阵。

一般情况下,惯导和 GNSS 的位置输出为大地坐标或笛卡尔直角坐标,不会输出 n 系下的直角坐标。天线相位中心位置的大地坐标记作 \mathbf{p}_{G} ,定义见(2.72),对应的惯导计 算值和 GNSS 观测值分别记作 $\hat{\mathbf{p}}_{G}$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}_{G}$,则观测向量为

$$\delta \mathbf{z}_{\rm r}^{\rm n} = \mathbf{D}_{\rm R} \left(\hat{\mathbf{p}}_{\rm G} - \tilde{\mathbf{p}}_{\rm G} \right) \tag{8.34}$$

其中,

$$\mathbf{D}_{\rm R} = \begin{bmatrix} {\rm R}_{\rm M} + {\rm h} & 0 & 0\\ 0 & ({\rm R}_{\rm N} + {\rm h})\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
(8.35)

如果用笛卡尔直角坐标(见第2章2.3.2.1小节),天线相位中心位置的直角坐标记作 \mathbf{r}_{G}^{e} ,对应的惯导计算值和 GNSS 观测值分别记作 $\hat{\mathbf{r}}_{G}^{e}$ 和 $\tilde{\mathbf{r}}_{G}^{e}$,则观测向量为

$$\delta \mathbf{z}_{\rm r}^{\rm n} = \mathbf{C}_{\rm e}^{\rm n} \left(\hat{\mathbf{r}}_{\rm G}^{e} - \tilde{\mathbf{r}}_{\rm G}^{e} \right) \tag{8.36}$$

式中, C_eⁿ 为位置矩阵, 见附录式(A.20), 重写如下:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$
(8.37)

8.3.2.2 GNSS 速度观测方程

GNSS 和 INS 的速度测量参考点分别是 GNSS 天线相位中心和 IMU 测量中心,接下来推导它们之间的速度转换公式,也称作速度杆臂补偿公式。如第6章6.3.1小节所述,本书所述速度均是物体相对于地球的速度。GNSS 天线相位中心速度记为 $\mathbf{v}_{G}^{n} = \frac{d\mathbf{r}_{G}}{dt}\Big|_{e}$ 。 方程(8.23)等号两边各项均在 e 系下对时间求导,可得

$$\left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathrm{e}} = \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathrm{e}} + \left. \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathrm{e}} \tag{8.38}$$

根据6.3.1节地速的定义,上式可改写为

$$\mathbf{v}_{\rm G} = \mathbf{v}_{\rm I} + \left. \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{dt}} \right|_{\rm e} \tag{8.39}$$

式中, \mathbf{v}_{G} 和 \mathbf{v}_{I} 分别为 GNSS 天线相位中心和 IMU 测量中心的速度,应用哥氏方 程(6.187)可得

$$\mathbf{v}_{\rm G} = \mathbf{v}_{\rm I} + \left. \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{dt}} \right|_{\rm b} + \boldsymbol{\omega}_{\rm eb} \times \boldsymbol{\ell}$$
(8.40)
将式(8.24)代入式(8.40),得

$$\mathbf{v}_{\rm G} = \mathbf{v}_{\rm I} + \boldsymbol{\omega}_{\rm eb} \times \boldsymbol{\ell} \tag{8.41}$$

式(8.41)等号两边加上投影坐标系 n,有

$$\mathbf{v}_{G}^{n} = \mathbf{v}_{I}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{eb}^{n} \times \boldsymbol{\ell}^{n}$$

$$= \mathbf{v}_{I}^{n} + (\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n} - \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}) \times (\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b})$$

$$= \mathbf{v}_{I}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) (\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) + (\boldsymbol{\omega}_{ib}^{n} \times) (\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b})$$
(8.42)

将式(2.25)代入式(8.42),整理,得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\rm G}^{\rm n} &= \mathbf{v}_{\rm I}^{\rm n} - (\boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} \times) \left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) + \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left(\boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \times \right) \mathbf{C}_{\rm n}^{\rm b} \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \\ &= \mathbf{v}_{\rm I}^{\rm n} - (\boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} \times) \left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) + \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left(\boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \times \right) \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \\ &= \mathbf{v}_{\rm I}^{\rm n} - (\boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} \times) \left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) + \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left(\boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \times \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) \\ &= \mathbf{v}_{\rm I}^{\rm n} - (\boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} \times) \left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) - \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left(\boldsymbol{\ell}^{\rm b} \times \boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \right) \end{aligned} \tag{8.43}$$

式(8.43)即速度杆臂补偿公式,描述了 IMU 测量中心和 GNSS 天线相位中心速度 之间的转换关系。对于普通运动场景,如果速度和杆臂不是特别大,等式(8.43)右边第 二项 ($\omega_{ie}^{n} \times$) $C_{b}^{n}\ell^{b}$ 的幅值很小。在实际导航应用中,式(8.43)写作

$$\hat{\mathbf{v}}_{G}^{n} = \hat{\mathbf{v}}_{I}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left(\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b} \right) - \hat{\mathbf{C}}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b})$$
(8.44)

如前所述, $(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times)(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b})$ 的数值较小, 做误差扰动时未考虑 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}$ 的误差。将惯导速 度误差定义式(7.8b)和陀螺测量误差定义式(7.8e)代入式(8.44), 省略关于误差的二阶项, 顾及式(8.44), 整理可得

$$\hat{\mathbf{v}}_{G}^{n} = \mathbf{v}_{I}^{n} + \delta \mathbf{v}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left[\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times) \right] \mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b} - \left[\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times) \right] \mathbf{C}_{b}^{n} \left[\boldsymbol{\ell}^{b} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \\ \approx \mathbf{v}_{G}^{n} + \delta \mathbf{v}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] \boldsymbol{\phi} - \left[\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n} \left[(\boldsymbol{\ell}^{b} \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \right]$$
(8.45)

GNSS 接收机输出的天线相位中心速度测量值含有误差,记作

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{n}} = \mathbf{v}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{n}} - \mathbf{n}_{\mathrm{v}} \tag{8.46}$$

GNSS 速度观测向量 $\delta \mathbf{z}_v$ 为 INS 推算速度与 GNSS 解算的速度之差,即

$$\delta \mathbf{z}_{v}^{n} = \hat{\mathbf{v}}_{G}^{n} - \tilde{\mathbf{v}}_{G}^{n}$$

$$= \delta \mathbf{v}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] \boldsymbol{\phi} - \left[\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \mathbf{n}_{v}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \delta \mathbf{v}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] \boldsymbol{\phi} - \left[\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \mathbf{n}_{v}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \delta \mathbf{v}^{n} - (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] \boldsymbol{\phi} - \left[\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \mathbf{n}_{v}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \delta \mathbf{v}^{n} - (\mathbf{v}_{b}^{n} \mathbf{v}) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] \boldsymbol{\phi} - \left[\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \mathbf{n}_{v}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \delta \mathbf{v}^{n} - (\mathbf{v}_{b}^{n} \mathbf{v}) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] \boldsymbol{\phi} - \left[\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \mathbf{n}_{v}$$

式(8.47)即 GNSS 速度观测方程,记作如下形式:

$$\delta \mathbf{z}_{v}^{n} = \mathbf{H}_{v} \delta \mathbf{x} + \mathbf{n}_{v} \tag{8.48}$$

将式 (8.11i) 代入式 $(8.47)^7$, 容易写出相应的观测矩阵 H_v

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}}_{3\times 21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{H}_{\mathbf{v}3} & -\mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\ell}^{\mathbf{b}} \times) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_{\mathbf{v}6} & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$$
(8.49)

式中,

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{v3} = -(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] - \left[\left(\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right) \times \right] \\ \mathbf{H}_{v6} = -\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times) \operatorname{diag}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \end{cases}$$
(8.50)

8.3.3 误差反馈

组合导航卡尔曼滤波器每次量测更新后,估计的误差状态向量 $\delta \mathbf{x}$ 将进行反馈修正,如图8.1所示。误差状态被反馈至惯导机械编排,用于修正惯导推算的位置、速度和姿态,然后作为导航结果输出。如果该部分误差也用于修正惯导机械编排自身的状态参数,即修正后的位置、速度和姿态作为下一历元惯导机械编排的初值,则 $\delta \mathbf{x}$ 的位置、速度和姿态误差部分立即置零: $\delta \mathbf{x}_{1:9} = \mathbf{0}_{9\times 1}$ 。上述设计称为闭环修正结构。位置、速度和姿态的修正方程为

$$\mathbf{v}_{c}^{n} = \hat{\mathbf{v}}^{n} - \delta \mathbf{v}^{n} \tag{8.51a}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b,c}}^{\mathrm{n}} = \left[\mathbf{I} + (\boldsymbol{\phi} \times)\right] \hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \tag{8.51b}$$

$$\begin{cases} \varphi_{\rm c} = \hat{\varphi} - \delta r_{\rm N} / \left(R_{\rm M} + h \right) \\ \lambda_{\rm c} = \hat{\lambda} - \delta r_{\rm E} / \left(R_{\rm N} + h \right) / \cos \varphi \\ h_{\rm c} = \hat{h} - \delta h = \hat{h} + \delta r_{\rm D} \end{cases}$$

$$(8.51c)$$

式中,右下标 c 表示反馈校正后的参数; 上标""表示惯导机械编排推算的状态量。

在闭环修正设计中,组合导航滤波器估计的惯性传感器误差常用于更新加速度计和陀螺的误差,并在每次机械编排迭代中用最新的传感器误差参数对加速度计和陀螺的观测值进行校正,校正方程为式(4.17)和式(4.18)。同样的,做此反馈更新后, $\delta \mathbf{x}$ 的惯性传感器误差部分也必须立即置零($\delta \mathbf{x}_{10:21} = \mathbf{0}_{12\times 1}$)。这种更新方式是将 $\delta \mathbf{x}$ 中的传感器误差部分累加至前一次量测更新的估计值(初值)上:

$$\mathbf{x}_{\rm SE,m} = \mathbf{x}_{\rm SE,m-1} + \delta \mathbf{x}_{\rm SE}, \quad \delta \mathbf{x}_{\rm SE} = \mathbf{b}_{\rm g}, \mathbf{b}_{\rm a}, \delta \mathbf{s}_{\rm g}, \delta \mathbf{s}_{\rm a}$$
(8.51d)

式中,右下标 m 表示滤波器当前的量测更新时刻, m – 1 为前一次量测更新时刻。注 意:惯性传感器误差反馈后,卡尔曼滤波每次量测更新估计的是**前一次估计值的残差**。 若在卡尔曼滤波量测更新后, $\delta \mathbf{x}$ 全部反馈,则在后续的滤波时间更新(预测)过程中, $\delta \mathbf{x}$ 一直为零,直至下一次量测更新。

注意:式(8.51a)~式(8.51d)的误差反馈方程必须跟导航参数误差的定义(式(7.8a)~(7.8e)) 完全对应。例如,若速度误差的定义修改为 $\hat{\mathbf{v}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}} - \delta \mathbf{v}^{\mathbf{n}}$,则速度的反馈修正公式必须 对应地修改为 $\mathbf{v}_{c}^{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{v}}^{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{v}^{\mathbf{n}}$ 。

⁷注意,式(8.11i)中的陀螺角速度白噪声项不需要代入,因为此处的目的是建立观测向量与 δx 的函数 关系。

8.3.4 状态初始化

启动 INS/GNSS 组合导航需要对导航状态和卡尔曼滤波器进行初始化。其中,导航状态的初始化包括确定初始位置、速度、姿态以及惯性传感器误差参数的初值。卡尔曼滤波器的初始化包括状态向量 δx 初值和协方差阵初值 P_0 的确定。对于误差状态卡尔曼滤波, δx 一般初始化为 $\delta x_0 = 0$ 。接下来讨论导航状态量的初始化和 P_0 的设置。

位置和速度一般通过 GNSS 进行初始化,只要 GNSS 接收机能够输出导航结果的 误差协方差阵,则应该用它来初始化 P₀ 的相关部分。另一种常用方法是假设位置和速 度的各分量的不确定度相等,且协方差阵的非对角线元素为零,不考虑各分量之间的相 关性,并根据 GNSS 定位模式设置初始位置和速度的方差。例如,若采用 GNSS RTK 定位,则位置的初始不确定度可设置为 2~5cm。位置和速度误差很容易观测,组合算法 的性能对这些状态的初始不确定性不太敏感,只要设置得不是太离谱,都能较快收敛。

姿态初始化方法的讨论详见第5章,根据不同的应用场景和惯导等级需要选用不同 的初始对准方法。一般情况下,不同的航向初始对准方法在确定航向的同时,也能给 出其方差,可以用这些数值来初始化 **P**₀ 的相关部分。若载体在静止条件下启动组合导 航,则横滚角和俯仰角的初值可通过加速度计调平的方法确定,对应的不确定度可用 式(5.7)进行估计。

对于高精度惯导,如果已知加速度计和陀螺的初始零偏和比例因子误差等(例如来 自产品手册或标定),则可用这些数值做初始化。另外一种常用做法是设置为 0。此时, P₀的传感器误差部分应设置为逐次上电重复性误差。对于低端 MEMS 惯导,如果系统 从静止状态开始启动导航,则可以通过对静止时段的陀螺观测取平均粗略估计零偏初 值,其方差的计算需要综合考虑噪声和地球自转角速度的影响。

8.4 INS/GNSS 伪距紧组合算法设计

INS/GNSS 松组合使用 GNSS 定位结果与 INS 融合,当可用卫星数少于四颗时退 化为 INS。紧组合将 GNSS 原始观测值(伪距、多普勒或载波相位)与 INS 推算信息进行 融合,导航滤波器同时估计 IMU 和 GNSS 的误差状态。紧组合对可用卫星数不做要求, 对 GNSS 观测信息的利用更充分,且能在原始观测层面探测并抑制粗差。INS/GNSS 紧 组合按照 GNSS 定位模式的不同分为伪距/INS、RTK(real-time kinematic)/INS、PPP (precise point positioning) /INS 紧组合等。本节以最简单的伪距/INS 紧组合为例,介 绍 INS 如何与 GNSS 原始观测进行融合。在松组合的基础上,紧组合算法设计的关键 在于 GNSS 相关状态量的选择、系统方程和伪距、多普勒观测方程的推导,及观测噪声 的建模。

8.4.1 GNSS 伪距/多普勒观测

GNSS 伪距和多普勒观测量受多种类型误差因素的影响,主要包括卫星端误差、信号传播路径误差、接收机端误差,以及其它误差[44,45,46]。

- 卫星端误差:包括卫星轨道误差、卫星钟差和群延迟、相对论效应和地球自转带来的误差。其中,卫星轨道误差、卫星钟差和群延迟可以通过广播星历进行改正,相对论效应和地球自转效应带来的误差通过相应的公式改正。
- 信号传播路径误差:电离层和对流程延迟是信号传播路径中的主要误差源。电离 层延迟可通过 Klobuchar、NeQuick 模型或者预报 GIM (global ionospheric map) 产品进行改正,也可采用双频消电离层组合来消除其一阶误差。对流层延迟通 常使用经验模型(如 Hopfield 或 Saastamoinen 模型)进行修正。
- 接收机端误差:主要包括接收机钟差和伪距硬件时延误差。接收机钟差通常作为紧组合算法的状态量进行估计和补偿,其建模方式在(8.4.2)节讨论。伪距硬件时延误差和接收机钟差与电离层有强耦合性,通常通过估计不同频点间的相对伪距硬件时延误差,即差分码偏差(differential code bias, DCB)进行修正。
- 其它误差:包括固体潮和海潮效应,其导致的 GNSS 测量误差可通过 IERS (international earth rotation and reference systems service)规范推荐的模型改正,如果测站离海岸很远,海潮误差可忽略不计。

在多 GNSS 系统中,还需要关注不同系统的时空基准差异。此外,由于各卫星定位 系统信号在接收机中的硬件时延误差不同,不同 GNSS 系统的卫星观测值之间存在时 间上的偏差,称为系统间偏差 (inter-system biases, ISB)。综上,对于 GNSS 伪距/多 普勒/INS 紧组合来说,接收机钟差和相对伪距时延误差作为系统状态量进行估计,其 它误差则通过对应的公式或经验模型进行改正,即可有效消除或减弱 GNSS 伪距测量 中的大部分误差。

接下来以北斗双频 (L1/L2)⁸非组合模型为例介绍伪距和多普勒观测,并据此设计 紧组合算法。

8.4.1.1 伪距观测

北斗伪距观测表示为

$$\begin{cases} P_1^C = \rho + t_r^C + \varepsilon_{P1}^C \\ P_2^C = \rho + t_r^C + dcb_{P1P2,r}^C + \varepsilon_{P2}^C \end{cases}$$

$$(8.52)$$

式中, P1、P2 为北斗 L1 和 L2 频点上的伪距观测值;右上标 C 表示北斗系统;t_r为接收机钟差的等效距离误差;dcb_{P1P2,r}为接收机 L2 频相对于 L1 频的相对伪距硬件时延误差的等效距离误差, ε_P 为未模型化的 GNSS 误差(如多路径误差)和伪距观测噪声。 ρ 为(某一颗)卫星和接收机之间的几何距离 $\rho = \|\mathbf{r}^{e,s} - \mathbf{r}^{e}_{G}\|$, $\mathbf{r}^{e,s}$ 为 e 系下卫星发射该 GNSS 信号时的位置, \mathbf{r}^{e}_{G} 为 e 系下接收机接收到该 GNSS 信号时的位置,卫星位置通过广播星历提供的开普勒轨道参数和轨道摄动参数建立轨道方程解算得到,其中卫星信号发射时刻可以采用迭代的方式或者用伪距求得。

⁸注意,这里的 L1 和 L2 泛指 GNSS 的任意两频。

8.4.1.2 多普勒观测

卫星多普勒观测,记作 D,表示为

$$\mathrm{D}\lambda = -\dot{\rho} + \mathrm{dt} + \varepsilon_{\mathrm{D}} \tag{8.53}$$

式中,D为多普勒观测值; λ 为载波相位的波长; $\dot{\rho} = \|\mathbf{v}^{e,s} - \mathbf{v}^{e}_{G}\|$ 为卫星和接收机运动 引起的卫地距变化率(卫地距对时间的导数);dt为接收机钟漂,将在8.4.2节详细介绍; ε_{D} 为未模型化的多普勒误差和多普勒观测噪声。影响多普勒速度测量的误差源中,卫 星位置误差、卫星速度误差和卫星钟差变化率可以通过星历文件进行修正;电离层误差 和对流层误差的变化率较小,可以忽略其影响;地球自转对多普勒测速的影响较大,需 要改正这一项。

8.4.2 系统方程

伪距/多普勒/INS 紧组合在松组合的误差状态 $\delta \mathbf{x}_{INS}$ 的基础上增广 GNSS 相关的误差状态量,选择为

$$\delta \mathbf{x}_{24 \times 1} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{\text{INS}} \\ \delta \mathbf{x}_{\text{GNSS}} \end{bmatrix}$$
 (8.54)

$$\delta \mathbf{x}_{\text{GNSS}}_{3\times 1} = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_{\text{r}}^{\text{C}} \\ d\mathbf{t}_{\text{r}} \\ d\mathbf{cb}_{\text{r}}^{\text{C}} \end{vmatrix}$$
(8.55)

式中, $\delta \mathbf{x}_{INS}$ 为惯导相关的误差状态向量,与式(8.9)一致,此处写出右下标 INS 是为了 区分 GNSS 相关的误差量 $\delta \mathbf{x}_{GNSS}$; t_r^C 为北斗接收机钟差等效距离误差, dt_r 为接收机 钟漂等效速度误差, dcb_r^C 为北斗 L2 频相对于 L1 频的相对伪距硬件时延误差的等效距 离误差(选择 L1 频作为基准频点),建模为

$$\dot{t}_{r}^{C}(t) = dt_{r}^{C}(t) + w_{t}^{C}(t)$$
 (8.56a)

$$dt_r(t) = w_{dt}(t) \tag{8.56b}$$

$$\dot{dcb}_{r}^{C}(t) = w_{dcb}^{C}(t)$$
(8.56c)

式中, $w_t^C(t)$ 为北斗接收机钟差等效距离误差的驱动白噪声, $w_{dt}(t)$ 为接收机钟漂等效速度误差的驱动白噪声, $w_{dcb}^C(t)$ 为北斗相对伪距硬件时延误差等效距离误差的驱动白噪声。

在状态向量的选择时,考虑增广接收机钟漂及采用模型(8.56a)和模型(8.56b)的理 由如下:接收机钟差 t^C_r不仅直接影响观测值的精度,还与高程和对流层延迟耦合密切。 不同 GNSS 接收机的时钟特性存在较大差异。大部分 GNSS 接收机使用低成本的石英 振荡器,频率稳定性较低,导致钟差存在显著的漂移,并可能随时间累积。接收机厂商 为解决上述问题通常采取如下两种调钟策略:一是实时估计和补偿钟漂,将其调整至接 近零的小量,从而使接收机钟差始终维持在噪声和跟踪抖动影响下的小幅范围内,称为时钟驯服 (clock steering);二是不实时补偿钟漂,而是当接收机钟差因钟漂累积到一 定阈值时,通过插入确定的整数毫秒或微秒的时钟跳跃进行调整,称为钟跳。

多数 GNSS 接收机常见毫秒级钟跳,其修正值较大但不频繁;而低成本导航型接 收机多见微秒级钟跳,幅度较小但修正频率较高。钟跳会破坏 GNSS 时标、伪距和相 位观测值之间的一致性。因此,无论钟跳的量级如何,都需要实时检测并利用观测值进 行校正。时钟驯服模式保持观测值的连续性,但接收机钟差会呈现随机性强的不规律抖 动,破坏其原始误差特性,通常将这种钟差建模为白噪声。在钟跳模式下,接收机钟本 身的特性未受破坏,钟差主要由缓慢变化的钟漂驱动,钟漂可建模为随机游走,因此钟 差可以通过钟漂的积分来表示。本书紧组合算法以第二种模式为例,给状态向量增广一 维接收机钟漂。

由式(8.56a)~式(8.56c)可得紧组合 GNSS 部分对应的状态转移矩阵和系统噪声阵:

$$\mathbf{\Phi}_{\rm GNSS} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(8.57)

$$\mathbf{Q}_{\rm GNSS} = \begin{bmatrix} w_{\rm t}^{\rm C} & 0 & 0\\ 0 & w_{\rm dt} & 0\\ 0 & 0 & w_{\rm dcb}^{\rm C} \end{bmatrix}$$
(8.58)

式中, Δt 为相邻两次 GNSS 观测的时间间隔。

结合松组合中已经推导的导航状态误差微分方程和 IMU 传感器误差微分方程,可以得到伪距/多普勒/INS 紧组合的状态转移矩阵和系统噪声阵:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{F} \Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{\text{GNSS}} \end{bmatrix}$$
(8.59)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathrm{INS}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathrm{GNSS}} \end{bmatrix}$$
(8.60)

式中, F 的具体表达式为(8.13); Q_{INS} 可以通过式(8.22)和式(8.15)计算得到。

8.4.3 伪距观测方程

与松组合类似,紧组合观测方程是建立 GNSS 原始观测量与卡尔曼滤波系统状态量的关联。伪距/INS 紧组合是根据 INS 推算的载体位置计算出与卫星之间的卫地距,然后与接收机输出的伪距实测值求差作为观测向量 z。

8.4.3.1 伪距观测方程

卫星(某一颗)与 GNSS 天线相位中心的距离称为卫地距,记作 ρ :

$$\rho = \| \mathbf{r}^{e,s} - \mathbf{r}^{e}_{G} \| = \Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

= $\sqrt{(x^{e,s} - x^{e}_{G})^{2} + (y^{e,s} - y^{e}_{G})^{2} + (z^{e,s} - z^{e}_{G})^{2}}$ (8.61)

式中, $\mathbf{r}^{e,s} = [\mathbf{x}^{e,s}, \mathbf{y}^{e,s}, \mathbf{z}^{e,s}]^{\top}$ 和 $\mathbf{r}_{G}^{e} = [\mathbf{x}_{G}^{e}, \mathbf{y}_{G}^{e}, \mathbf{z}_{G}^{e}]^{\top}$ 分别为卫星和 GNSS 天线的地心位置 在 e 系下的投影; $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}^{e,s} - \mathbf{r}_{G}^{e}$ 为 GNSS 天线到卫星的位置向量。由惯导推算的 GNSS 天线位置 \mathbf{r}_{G}^{e} 含有误差,对应的卫地距记作 $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \| \mathbf{r}^{\text{e,s}} - \hat{\mathbf{r}}^{\text{e}}_{\text{G}} \| = \sqrt{(\mathbf{x}^{\text{e,s}} - \hat{\mathbf{x}}^{\text{e}}_{\text{G}})^2 + (\mathbf{y}^{\text{e,s}} - \hat{\mathbf{y}}^{\text{e}}_{\text{G}})^2 + (\mathbf{z}^{\text{e,s}} - \hat{\mathbf{z}}^{\text{e}}_{\text{G}})^2}$$
(8.62)

对 $\hat{\rho}$ 在 GNSS 天线位置真值 ($\mathbf{r}_{G}^{e} = [\mathbf{x}_{G}^{e}, \mathbf{y}_{G}^{e}, \mathbf{z}_{G}^{e}]^{\mathsf{T}}$) 处做泰勒展开,保留至一阶项, 根据式(7.6),可得

$$\hat{\rho} \approx \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}} \delta \mathbf{x}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{y}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}} \delta \mathbf{y}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{z}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}} \delta \mathbf{z}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}$$

$$= \rho - \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{x}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}}{\rho} \delta \mathbf{x}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} - \frac{\mathbf{y}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{y}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}}{\rho} \delta \mathbf{y}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} - \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{z}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}}{\rho} \delta \mathbf{z}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}$$

$$= \rho - \mathbf{e}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{s}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} \qquad (8.63)$$

式中, $\delta \mathbf{r}_{G}^{e} = \hat{\mathbf{r}}_{G}^{e} - \mathbf{r}_{G}^{e}$ 为惯导计算的 GNSS 天线位置的误差在 e 系下的投影; \mathbf{e}_{G}^{s} 为由天 线指向卫星方向上的单位向量,称作视线向量:

$$\mathbf{e}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{s}} \triangleq \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}}{\parallel \mathbf{r}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} \parallel} = \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}}{\rho}$$
(8.64)

式(8.63)在做扰动分析时未考虑视线向量的扰动误差,因为惯导推算的位置误差对 \mathbf{e}_{G}^{s} 的影响可小到忽略不计。根据式(8.27)可得惯导计算的 GNSS 天线位置误差在 n 系 下的投影为

$$\delta \mathbf{r}_{\rm G}^{\rm n} = \hat{\mathbf{r}}_{\rm G}^{\rm n} - \mathbf{r}_{\rm G}^{\rm n} = \delta \mathbf{r}^{\rm n} + \left[\left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) \times \right] \boldsymbol{\phi}$$
(8.65)

式中, $\delta \mathbf{r}^n$ 为惯导测量中心的位置误差,见式(8.9)。将 $\delta \mathbf{r}^n_G$ 投影至 e 系为

$$\delta \mathbf{r}_{G}^{e} = \mathbf{C}_{n}^{e} \delta \mathbf{r}_{G}^{n}$$

$$= \mathbf{C}_{n}^{e} \left(\delta \mathbf{r}^{n} + \left[\left(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b} \right) \times \right] \boldsymbol{\phi} \right)$$
(8.66)

将式(8.66)代入式(8.63),可得惯导推算的卫地距

$$\hat{\rho} = \rho - \mathbf{e}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{s}} \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} \left[\delta \mathbf{r}^{\mathrm{n}} + (\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{b}}) \times \boldsymbol{\phi} \right]$$
(8.67)

GNSS 伪距观测值为 GNSS 伪距观测与惯导推算的卫地距之差⁹。对于一颗北斗卫 星的 L1、L2 频点上的伪距观测值,根据式(8.52)和式(8.67),有

$$\begin{cases} \delta \mathbf{z}_{P1}^{C} = \mathbf{P}_{1}^{C} - \hat{\rho} = \mathbf{e}_{G}^{s} \mathbf{C}_{n}^{e} \left(\delta \mathbf{r}^{n} + (\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \boldsymbol{\phi} \right) + \mathbf{t}_{r}^{C} + \varepsilon_{P1}^{C} \\ \delta \mathbf{z}_{P2}^{C} = \mathbf{P}_{2}^{C} - \hat{\rho} = \mathbf{e}_{G}^{s} \mathbf{C}_{n}^{e} \left(\delta \mathbf{r}^{n} + (\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \boldsymbol{\phi} \right) + \mathbf{t}_{r}^{C} + \operatorname{dcb}_{P1P2,r}^{C} + \varepsilon_{P2}^{C} \end{cases}$$
(8.68)

⁹注意,紧组合的观测向量采用 GNSS 观测减去 INS 推算值,与松组合相反,主要是为了与 GNSS 精密定位的行业习惯保持一致,算法上没有任何区别。

对于每颗北斗卫星的 L1 和 L2 频的伪距观测值都可以列出如式(8.68)中的两个观测方程,将其写成向量形式为

$$\delta \mathbf{z}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}} = \mathbf{H}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}} \delta \mathbf{x} + \mathbf{n}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}}$$

$$(8.69)$$

式中,

$$\delta \mathbf{z}_{P}^{C} = \begin{bmatrix} \delta z_{P1}^{C} \\ \delta z_{P2}^{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{P}^{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{p1} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{H}_{p3} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_{p1} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{H}_{p3} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{0}_{3\times 1} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(8.70)

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{p1} &= \mathbf{e}_{G}^{s} \mathbf{C}_{n}^{e} \\ \mathbf{H}_{p3} &= \mathbf{e}_{G}^{s} \mathbf{C}_{n}^{e} \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] \end{aligned}$$

$$(8.71)$$

每增加一个 GNSS 伪距观测值,观测向量将相应增加一行。由于不同卫星的视线向量不同,位置和姿态对应的观测系数也会有所不同。对于同一卫星系统,所有观测值共用相同的接收机钟差,因此接收机钟差对应的系数是一致的;若引入其他卫星系统,则需要额外增加一维来表示该系统的接收机钟差,或者相对于北斗系统的系统间偏差 ISB (假设以北斗系统作为基准系统)。在同一卫星系统内,相同频点的观测对应的相对伪距硬件时延误差的系数是一致的,而对于基准频点,其观测系数设定为 0;如果增加其他频点的观测,则需要额外增加一维来表示该频点的相对伪距硬件时延误差。

8.4.3.2 多普勒观测方程

根据式(8.53)可知, GNSS 天线与卫星之间的多普勒速度与卫地距的导数紧密相关, 方程 (8.61) 等号两边在 e 系下对时间求导,得

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{\Delta\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}}} \frac{\mathrm{d}\left(\Delta\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}\right)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathrm{e}}$$

$$= \frac{1}{2\rho} \frac{\mathrm{d}\left(\Delta\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}\right)}{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathrm{e}}$$

$$(8.72)$$

根据向量内积对时间求导公式(2.44e),可得

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2\rho} \left(\Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}\Delta \mathbf{r}}{\mathrm{dt}} \bigg|_{\mathrm{e}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\rho} \cdot \left. \frac{\mathrm{d} \left(\mathbf{r}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} \right) \right|_{\mathrm{e}}}{\mathrm{dt}} \bigg|_{\mathrm{e}}$$
$$= \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}}{\| \mathbf{r}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} \|} \cdot \left(\mathbf{v}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{v}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} \right)$$
$$= \mathbf{e}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{s}} \cdot \left(\mathbf{v}^{\mathrm{e,s}} - \mathbf{v}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}} \right)$$
(8.73)

式中, $\mathbf{v}^{e,s}$ 、 \mathbf{v}^{e}_{G} 分别为卫星和 GNSS 天线相对地球的速度在 e 系下的投影。由惯导推算的 GNSS 天线速度计算卫地距的时间变化率 $\dot{\rho}$ 含有误差,记作 $\dot{\dot{\rho}}$ 。对式(8.73)做误差扰动,忽略视线向量 \mathbf{e}^{s}_{G} 和卫星速度 $\mathbf{v}^{e,s}$ 的误差(卫星速度误差将体现在 GNSS 多普勒观测值中),可得

$$\dot{\dot{\rho}} \approx \dot{\rho} - \mathbf{e}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{s}} \cdot \delta \mathbf{v}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}$$
(8.74)

式中, $\delta \mathbf{v}_{G}^{e}$ 为惯导推算的 GNSS 天线速度的误差在 e 系下的投影,计算如下:

$$\delta \mathbf{v}_{G}^{e} = \delta \left(\mathbf{C}_{n}^{e} \mathbf{v}_{G}^{n} \right) = \left(\delta \mathbf{C}_{n}^{e} \right) \mathbf{v}_{G}^{n} + \mathbf{C}_{n}^{e} \delta \mathbf{v}_{G}^{n}$$

$$(8.75)$$

式中, C_n^e 为位置矩阵,见附录式(A.21),重写如下:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} = (\mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}})^{\top} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda & -\cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$
(8.76)

位置矩阵 C_n^e 的扰动误差 δC_n^e 计算式为(7.34), 重写如下:

$$\delta \mathbf{C}_{n}^{e} = \mathbf{C}_{n}^{e} \left(\delta \boldsymbol{\theta} \times \right) \tag{8.77}$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \delta \lambda \cos \varphi \\ -\delta \varphi \\ -\delta \lambda \sin \varphi \end{bmatrix}$$
(8.78)

式中, $\delta \theta$ 是真 n 系到计算的 n 系 (记作 n 系) 的等效旋转矢量,详见第7章7.2节。将 式(8.77)代入式(8.75),得

$$\delta \mathbf{v}_{G}^{e} = \mathbf{C}_{n}^{e} \left(\delta \boldsymbol{\theta} \times \right) \mathbf{v}_{G}^{n} + \mathbf{C}_{n}^{e} \delta \mathbf{v}_{G}^{n}$$

$$= \mathbf{C}_{n}^{e} \left[\left(\delta \boldsymbol{\theta} \times \right) \mathbf{v}_{G}^{n} \right] + \mathbf{C}_{n}^{e} \delta \mathbf{v}_{G}^{n}$$

$$= -\mathbf{C}_{n}^{e} \left(\mathbf{v}_{G}^{n} \times \right) \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{C}_{n}^{e} \delta \mathbf{v}_{G}^{n}$$
(8.79)

将 $\delta \theta$ 与位置误差 $\delta \mathbf{r}^n$ 的转换公式(7.36)代入式(8.79),得

$$\delta \mathbf{v}_{\rm G}^{\rm e} = -\mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \left(\mathbf{v}_{\rm G}^{\rm n} \times \right) \mathbf{M}_{\rm R} \delta \mathbf{r}_{\rm G}^{\rm n} + \mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \delta \mathbf{v}_{\rm G}^{\rm n}$$
(8.80)

式中, M_R 的计算参考式(7.37), 重写如下:

$$\mathbf{M}_{\rm R} = \begin{bmatrix} 0 & 1/({\rm R}_{\rm N} + {\rm h}) & 0\\ -1/({\rm R}_{\rm M} + {\rm h}) & 0 & 0\\ 0 & -\tan\varphi/({\rm R}_{\rm N} + {\rm h}) & 0 \end{bmatrix}$$
(8.81)

根据位置和速度杆臂补偿公式,将式(8.27)和式(8.45)代入式(8.80),得

$$\delta \mathbf{v}_{\rm G}^{\rm e} = - \mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \left(\mathbf{v}_{\rm G}^{\rm n} \times \right) \mathbf{M}_{\rm R} \left[\delta \mathbf{r}^{\rm n} + \left[\left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) \times \right] \boldsymbol{\phi} \right] + \mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \delta \mathbf{v}^{\rm n} - \mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \left(\left(\boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} \times \right) \left[\left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) \times \right] \boldsymbol{\phi} + \left[\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left(\boldsymbol{\ell}^{\rm b} \times \boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \right) \right] \times \boldsymbol{\phi} + \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left[\left(\boldsymbol{\ell}^{\rm b} \times \right) \delta \boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \right] \right)$$
(8.82)

紧组合多普勒观测为 GNSS 多普勒观测值与惯导推算的多普勒速度 $(-\hat{\rho})$ 之差, 即

$$\delta z_{\rm D} = D\lambda - (-\hat{\dot{\rho}}) = -\dot{\rho} + dt + \varepsilon_{\rm D} + (\dot{\rho} - \mathbf{e}_{\rm G}^{\rm s} \cdot \delta \mathbf{v}_{\rm G}^{\rm e})$$

$$= -\mathbf{e}_{\rm G}^{\rm s} \cdot \delta \mathbf{v}_{\rm G}^{\rm e} + dt + \varepsilon_{\rm D}$$
(8.83)

将式(8.82)代入式(8.83),得

$$\delta z_{\rm D} = -\mathbf{e}_{\rm G}^{\rm s} \delta \mathbf{v}_{\rm G}^{\rm e} + \mathrm{dt} + \varepsilon_{\rm D}$$

$$= -\mathbf{e}_{\rm G}^{\rm s} \left(-\mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \left(\mathbf{v}_{\rm G}^{\rm n} \times \right) \mathbf{M}_{\rm R} \left[\delta \mathbf{r}^{n} + \left[\left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) \times \right] \boldsymbol{\phi} \right] + \mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \delta \mathbf{v}^{\rm n} \right) + \mathrm{dt} + \varepsilon_{\rm D} \qquad (8.84)$$

$$+ \mathbf{e}_{\rm G}^{\rm s} \mathbf{C}_{\rm n}^{\rm e} \left(\left(\boldsymbol{\omega}_{\rm ie}^{\rm n} \times \right) \left[\left(\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \boldsymbol{\ell}^{\rm b} \right) \times \right] \boldsymbol{\phi} + \left[\mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left(\boldsymbol{\ell}^{\rm b} \times \boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \right) \right] \times \boldsymbol{\phi} + \mathbf{C}_{\rm b}^{\rm n} \left[\left(\boldsymbol{\ell}^{\rm b} \times \right) \delta \boldsymbol{\omega}_{\rm ib}^{\rm b} \right] \right)$$

将式(8.84)写成向量形式

$$\delta z_{\rm D} = \mathbf{H}_{\rm D} \delta \mathbf{x} + \mathbf{n}_{\rm D} \tag{8.85}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{D}}_{1\times24} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{v}1} & -\mathbf{e}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{s}}\mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} & \mathbf{H}_{\mathrm{v}3} & \mathbf{H}_{\mathrm{v}4} & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{H}_{\mathrm{v}6} & \mathbf{0}_{3\times1} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(8.86)

式中,

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{v1} = \mathbf{e}_{G}^{s} \mathbf{C}_{n}^{e} \left(\mathbf{v}_{G}^{n} \times \right) \mathbf{M}_{R} \\ \mathbf{H}_{v3} = \mathbf{e}_{G}^{s} \left(\mathbf{C}_{n}^{e} \left(\mathbf{v}_{G}^{n} \times \right) \mathbf{M}_{R} \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] + \mathbf{C}_{n}^{e} \left((\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} \times) \left[(\mathbf{C}_{b}^{n} \boldsymbol{\ell}^{b}) \times \right] + \left[\mathbf{C}_{b}^{n} (\boldsymbol{\ell}^{b} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \right] \times \right) \right) \\ \mathbf{H}_{v4} = \mathbf{e}_{G}^{s} \mathbf{C}_{n}^{e} \mathbf{C}_{b}^{n} \left(\boldsymbol{\ell}^{b} \times \right) \\ \mathbf{H}_{v6} = \mathbf{e}_{G}^{s} \mathbf{C}_{n}^{e} \mathbf{C}_{b}^{n} \left(\boldsymbol{\ell}^{b} \times \right) \operatorname{diag}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}) \end{cases}$$

在扩展卡尔曼滤波框架下,每增加一个多普勒观测值,观测向量将相应地增加一行。同样地,由于不同卫星的视线向量不同,这会导致包含视线向量的观测系数有所区别。需要注意的是,尽管不同卫星系统可能共享同一个接收机的晶振,从而具有相同的钟漂,但在实际应用中,增加卫星系统通常不会增加钟漂的维度,因为钟漂是接收机晶振的特性,与卫星系统无关。

8.4.4 GNSS 测量误差随机模型

紧组合滤波器要求对式(8.52)的伪距噪声 ε_P 和式(8.53)的多普勒噪声 ε_D 建立合理 的随机模型来描述其不确定度。伪距不仅受观测噪声的影响,还受卫星星历误差、电离 层和对流层模型改正误差、多路径误差等因素的综合影响。多普勒速率观测也受卫星星 历误差和多路径误差等因素的影响。根据方差传播定律,观测值的方差可表示为

$$\sigma_{\rm obs,P}^2 = \sigma_{\rm P}^2 + \sigma_{\rm eph,P}^2 + \sigma_{\rm trop}^2 + \sigma_{\rm ion}^2 + \sigma_{\rm mp,P}^2$$

$$\sigma_{\rm obs,D}^2 = \sigma_{\rm D}^2 + \sigma_{\rm eph,V}^2 + \sigma_{\rm mp,D}^2$$
(8.88)

式中, σ_P 和 σ_D 分别为伪距噪声和多普勒噪声,与接收机的硬件特性和跟踪环路带宽有关; σ_{eph} 、 σ_{trop} 和 σ_{ion} 分别为卫星星历误差、电离层和对流层模型改正误差,一般可以根据产品或者经验精度值设定; σ_{mp} 为多路径误差,通常结合额外的抗差手段来确定。

式(8.88)是针对单颗卫星的观测噪声方差模型,不同卫星的伪距和多普勒观测误差 还与卫星高度角和信号强度(载噪比(C/N₀))有关,使用多颗卫星观测值进行紧组合 时,需要对它们进行加权处理。常用的两种定权方法为高度角定权和载噪比定权。其

(8.87)

中,高度角定权模型认为低高度角的卫星更容易受到传播路径上大气延迟的影响,高度 角越低,卫星观测值的权重越小。常用的高度角定权方法为

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \sigma_0^2, & \mathbf{E} > \pi/6\\ \frac{\sigma_0^2}{2\sin \mathbf{E}}, & \mathbf{E} \leqslant \pi/6 \end{cases}$$
(8.89)

或

$$R = \frac{\sigma_0^2}{\sin^2 E} \tag{8.90}$$

式中, R 为观测值方差, σ_0 为观测噪声基值, E 为卫星高度角。

载噪比定权模型认为信号的强弱能反映观测值的质量:通常载噪比越高,观测值的可信度越高,应赋较高权重;反之,载噪比越低,观测值的可信度越差,权重应降低。 一种经典的载噪比定权模型为 SIGMA – ε 模型:

$$R = C_i \cdot 10^{-\frac{C/N_0}{10}} \tag{8.91}$$

式中, C/N_0 为接收机输出的载噪比, C_i 与波长、接收机和天线类型等因素有关, 设置为经验值。

高度角定权和载噪比定权的方法各有优势,实际应用中应综合考虑信号强弱和信 号传播路径的几何影响,构建合理的定权模型。

附录 A 附录

A.1 姿态表达式的相互转换

下面给出 b 系相对参考系 R 系的姿态表达式间的转换公式。注意,只有遵循以下 符号约定才能使用后面的转换公式。规定 b 系轴线为前右下 (FRD)。欧拉角定义为: R 系按 "ZYX"的转轴顺序依次转动角度 ψ 、 θ 和 ϕ 后与 b 系对齐。用等效旋转矢量 则描述为: R 系绕空间矢量 ϕ 的方向转动角度 $\phi = \|\phi\|$ 后与 b 系对齐。方向余弦矩阵 \mathbf{C}_{b}^{R} 和姿态四元数 \mathbf{q}_{b}^{R} 上下角标的含义与第6章6.2.2小节和6.2.3小节约定一致。

1、欧拉角转方向余弦矩阵

$$\mathbf{C}_{b}^{R} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$
(A.1)
$$\vec{x} \oplus, \ c = \cos\left(\right), \ s = \sin\left(\right)_{\circ}$$

2、欧拉角转四元数

$$\mathbf{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$
(A.2)

3、方向余弦矩阵转欧拉角

方向余弦矩阵 C_b^R 的第 i 行第 j 列的元素记作 c_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$ 。首先计算俯仰角:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-c_{31}}{\sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}} \tag{A.3}$$

 θ 的取值范围为 $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ 。

当 $|\theta| \neq \frac{\pi}{2}$ (实际计算时以 $|c_{31}| < 0.999$ 判断),则 ϕ 和 ψ 计算如下:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}} \tag{A.4}$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}} \tag{A.5}$$

计算 ϕ 和 ψ 时注意使用四象限反正切函数 atan2。当 $|c_{31}| \ge 0.999$ 时,只能计算 ϕ 和 ψ 的组合:

$$\psi - \phi = \tan^{-1} \frac{c_{23} - c_{12}}{c_{13} + c_{22}}, \qquad c_{31} \leqslant -0.999,$$

$$\psi + \phi = \pi + \tan^{-1} \frac{c_{23} + c_{12}}{c_{13} - c_{22}}, \qquad c_{31} \geqslant 0.999.$$
(A.6)

4、方向余弦矩阵转四元数

首先做如下计算:

$$P_{1} = 1 + tr(\mathbf{C}_{b}^{R}), \qquad P_{2} = 1 + 2c_{11} - tr(\mathbf{C}_{b}^{R}),$$

$$P_{3} = 1 + 2c_{22} - tr(\mathbf{C}_{b}^{R}), \quad P_{4} = 1 + 2c_{33} - tr(\mathbf{C}_{b}^{R})$$
(A.7)

式中, $tr(\mathbf{C}_{b}^{R})$ 为矩阵的迹。

(1) 如果 $P_1 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4), \quad M$ $q_0 = 0.5\sqrt{P_1}, \quad q_1 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_0}, \quad q_2 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_0}$ (A.8)

(2) 如果
$$P_2 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$$
, 则
= $c_{21} + c_{12}$ c₁₅

$$q_1 = 0.5\sqrt{P_2}, \quad q_2 = \frac{c_{21} + c_{12}}{4q_1}, \quad q_3 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_1}, \quad q_0 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_1}$$
 (A.9)

(3) 如果
$$P_3 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$$
, 则

$$q_2 = 0.5\sqrt{P_3}, \quad q_3 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_2}, \quad q_0 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_2}, \quad q_1 = \frac{c_{12} + c_{21}}{4q_2}$$
 (A.10)

(4) 如果
$$P_4 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$$
, 则

$$q_3 = 0.5\sqrt{P_4}, \quad q_0 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_3}, \quad q_1 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_3}$$
 (A.11)

5、四元数转方向余弦矩阵

$$\mathbf{C}_{b}^{R} = \begin{bmatrix} q_{0}^{2} + q_{1}^{2} - q_{2}^{2} - q_{3}^{2} & 2(q_{1}q_{2} - q_{0}q_{3}) & 2(q_{1}q_{3} + q_{0}q_{2}) \\ 2(q_{1}q_{2} + q_{0}q_{3}) & q_{0}^{2} - q_{1}^{2} + q_{2}^{2} - q_{3}^{2} & 2(q_{2}q_{3} - q_{0}q_{1}) \\ 2(q_{1}q_{3} - q_{0}q_{2}) & 2(q_{2}q_{3} + q_{0}q_{1}) & q_{0}^{2} - q_{1}^{2} - q_{2}^{2} + q_{3}^{2} \end{bmatrix}$$
(A.12)

6、四元数转等效旋转矢量

记 $\mathbf{q}_{b}^{R} = \begin{bmatrix} q_{0} & q_{1} & q_{2} & q_{3} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$,对应的等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}_{Rb}$ 计算如下:

• 如果 $q_0 \neq 0$, 则

$$\|0.5\phi\| = \tan^{-1} \frac{\sin\|0.5\phi\|}{\cos\|0.5\phi\|} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{q_0}$$
(A.13)

$$\mathbf{f} = \frac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|} \tag{A.14}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{f} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\top \tag{A.15}$$

• 如果 q₀ = 0, 则

$$\boldsymbol{\phi} = \pi \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\top \tag{A.16}$$

7、等效旋转矢量转方向余弦矩阵

$$\mathbf{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{R}} = \mathbf{I} + \frac{\sin \|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|} \left(\boldsymbol{\phi}\times\right) + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|^{2}} \left(\boldsymbol{\phi}\times\right) \left(\boldsymbol{\phi}\times\right) \tag{A.17}$$

$$(\boldsymbol{\phi} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{z} & \phi_{y} \\ \phi_{z} & 0 & -\phi_{x} \\ -\phi_{y} & \phi_{x} & 0 \end{bmatrix}$$
(A.18)

8、等效旋转矢量转四元数

$$\mathbf{q}_{b}^{R} = \begin{bmatrix} \cos \| 0.5 \boldsymbol{\phi} \| \\ \frac{\sin \| 0.5 \boldsymbol{\phi} \|}{\| 0.5 \boldsymbol{\phi} \|} 0.5 \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}$$
(A.19)

9、位置矩阵 C_n^e

如图A.1所示, e 系绕其 z 轴转动角度 λ (经度) 后到达过渡坐标系 e', e' 系绕其 y 轴正方向 (y_{e'}) 转动 $-(\varphi + 90^{\circ})$ (或绕 y_{e'} 反方向转动 $\varphi + 90^{\circ}$) 后到达 n 系位置。参 考第6章6.2.1.3小节,容易写出 \mathbb{C}_{e}^{n} 的表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} &= \mathbf{C}_{\mathrm{e}'}^{\mathrm{n}} \mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}'} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\left(-\varphi - 90^{\circ}\right) & 0 & -\sin\left(-\varphi - 90^{\circ}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(-\varphi - 90^{\circ}\right) & 0 & \cos\left(-\varphi - 90^{\circ}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$
(A.20)

根据方向余弦矩阵的性质式(6.25),有

$$\mathbf{C}_{n}^{e} = (\mathbf{C}_{e}^{n})^{\top} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda & -\cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$
(A.21)

矩阵 \mathbf{C}_{n}^{e} 和 \mathbf{C}_{e}^{n} 由纬度和经度即可确定,因此称它们为位置矩阵。



图 A.1 位置矩阵: e 系到 n 系的转动示意图

A.2 四元数的旋转算子

证明:对于任意单位四元数 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_v$ 和 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_v$,其中 \mathbf{q} 的三角函数形式记 作 $\mathbf{q} = \cos \theta/2 + \mathbf{u} \sin \theta/2$ (\mathbf{u} 为 \mathbf{q}_v 方向的单位向量)。 \mathbf{q} 和 \mathbf{p} 的乘法运算公式(6.80)重

写为如下形式:

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = (\mathbf{p}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_v^{\top} \mathbf{q}_v) + (\mathbf{p}_0 \mathbf{q}_v + \mathbf{q}_0 \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v)$$
(A.22)

任意三维向量 v 都可以看作实部为 0 的纯虚四元数 v = 0 + v。将向量 v 分解为 v = a + n, 其中 a 和 n 分别是与 q_v 平行和垂直的分量,如图A.2所示,有 a = kq_v (k 为常数), n · q_v = 0。旋转算子的证明思路为:证明 L_q(·) 算子不会改变 a 的方向和长 度,但使 n 绕 q_v 转动 θ 。

首先, 计算 $L_q(\mathbf{a})$ 对向量 **a** 的作用。将 **a** 看作实部为 0 的纯虚四元数代入算子 $L_q(\cdot)$, 并反复使用四元数乘法公式(A.22), 整理得

$$\begin{split} \mathbf{L}_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}) &= (\mathbf{q}_{0} + \mathbf{q}_{v}) \circ \mathbf{a} \circ (\mathbf{q}_{0} - \mathbf{q}_{v}) \\ &= (\mathbf{q}_{0} + \mathbf{q}_{v}) \circ (0 + \mathbf{k}\mathbf{q}_{v}) \circ (\mathbf{q}_{0} - \mathbf{q}_{v}) \\ &= (\mathbf{0} - \mathbf{k}\mathbf{q}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v} + \mathbf{k}\mathbf{q}_{0}\mathbf{q}_{v} + 0 + \mathbf{k}\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{q}_{v}) \circ (\mathbf{q}_{0} - \mathbf{q}_{v}) \\ &= (-\mathbf{k}\mathbf{q}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v} + \mathbf{k}\mathbf{q}_{0}\mathbf{q}_{v}) \circ (\mathbf{q}_{0} - \mathbf{q}_{v}) \\ &= -\mathbf{k}\mathbf{q}_{0}\mathbf{q}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v} + \mathbf{k}\mathbf{q}_{0}\mathbf{q}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v} + (\mathbf{k}\mathbf{q}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v})\mathbf{q}_{v} + \mathbf{k}\mathbf{q}_{0}^{2}\mathbf{q}_{v} - (\mathbf{k}\mathbf{q}_{0}\mathbf{q}_{v}) \times \mathbf{q}_{v} \end{split}$$
(A.23)
$$&= (\mathbf{k}\mathbf{q}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v})\mathbf{q}_{v} + \mathbf{k}\mathbf{q}_{0}^{2}\mathbf{q}_{v} \\ &= \mathbf{k}\left(\mathbf{q}_{v}^{\top}\mathbf{q}_{v} + \mathbf{q}_{0}^{2}\right)\mathbf{q}_{v} \\ &= \mathbf{k}\mathbf{q}_{v} \\ &= \mathbf{a} \end{split}$$

式(A.23)表明 $L_q(\cdot)$ 算子不会改变 a 的方向和长度。然后,计算 $L_q(\mathbf{n})$ 对向量 n 的作用。将 n 看作实部为 0 的纯虚四元数,记 $\Lambda = \mathbf{q} \circ \mathbf{n}$,展开为

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\mathbf{q}_0 \times 0 - \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{q}_0 \mathbf{n} + 0 \mathbf{q}_v + \mathbf{q}_v \times \mathbf{n})$$

= $\mathbf{q}_0 \mathbf{n} + \mathbf{q}_v \times \mathbf{n}$ (A.24)

然后, 计算 $L_q(\mathbf{n})$ 对向量 \mathbf{n} 的作用。根据定义展开为

$$L_{q} (\mathbf{n}) = \mathbf{q} \circ \mathbf{n} \circ \mathbf{q}^{*} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{q}^{*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ q_{0}\mathbf{n} + \mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} q_{0} \\ -\mathbf{q}_{v} \end{bmatrix}$$

$$= [0 \times q_{0} - (q_{0}\mathbf{n} + \mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n}) \cdot (-\mathbf{q}_{v})] + [-0\mathbf{q}_{v} + q_{0} (q_{0}\mathbf{n} + \mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n})]$$

$$+ (q_{0}\mathbf{n} + \mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n}) \times (-\mathbf{q}_{v})$$
(A.25)

由于 n 与 q_v 垂直, 且 q_v×n 也与 q_v 垂直, 故 (q_v×n)·q_v = 0, n·q_v = 0, 代入 式(A.25), 并根据向量的叉乘公式(2.14), 整理可得

$$L_{q} (\mathbf{n}) = q_{0}^{2} \mathbf{n} + q_{0} (\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n}) - q_{0} (\mathbf{n} \times \mathbf{q}_{v}) - (\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{q}_{v}$$

= $q_{0}^{2} \mathbf{n} + 2q_{0} (\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n}) + \mathbf{q}_{v} \times (\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n})$ (A.26)

根据向量三重积公式(2.21)及向量垂直性质可得

$$\mathbf{q}_{v} \times (\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{q}_{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{q}_{v} - (\mathbf{q}_{v} \cdot \mathbf{q}_{v}) \mathbf{n} = -(\mathbf{q}_{v} \cdot \mathbf{q}_{v}) \mathbf{n}$$
(A.27)

代入式(A.26)得

$$L_{q} (\mathbf{n}) = q_{0}^{2} \mathbf{n} + 2q_{0} (\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n}) - (\mathbf{q}_{v} \cdot \mathbf{q}_{v}) \mathbf{n}$$

= $(q_{0}^{2} - \mathbf{q}_{v}^{\top} \mathbf{q}_{v}) \mathbf{n} + 2q_{0} (\mathbf{q}_{v} \times \mathbf{n})$ (A.28)

由于 $\mathbf{q}_{v} = \mathbf{u}\sqrt{\mathbf{q}_{v}^{\intercal}\mathbf{q}_{v}},$ 故式(A.28)整理可得

$$L_{q}(\mathbf{n}) = (q_{0}^{2} - \mathbf{q}_{v}^{\top} \mathbf{q}_{v})\mathbf{n} + 2q_{0}\sqrt{\mathbf{q}_{v}^{\top} \mathbf{q}_{v}}(\mathbf{u} \times \mathbf{n})$$
$$= (\cos^{2} \frac{\theta}{2} - \sin^{2} \frac{\theta}{2})\mathbf{n} + 2\cos \frac{\theta}{2}\sin \frac{\theta}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{n})$$
$$= \mathbf{n}\cos\theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{n})\sin\theta$$
(A.29)

由于 u 和 n 垂直,且 u 为单位向量,由图A.2易知, u × n = n_⊥。因此,式(A.29)可 写作

$$L_{q}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\cos\theta + \mathbf{n}_{\perp}\sin\theta \tag{A.30}$$

式(A.30)表明算子 L_q(**n**) 对向量 **n** 的作用为:使向量 **n** 在 **n** 和 **n**_{\perp} 定义的平面内旋 转 θ 角,转轴为 **u** 的正方向。容易证明 L_q(·) 为线性算子, L_q(**v**) = L_q(**a**) + L_q(**n**),则有

$$L_{q}(\mathbf{v}) = \mathbf{a} + \mathbf{n}\cos\theta + \mathbf{n}_{\perp}\sin\theta \tag{A.31}$$

式(A.31)表明算子 $L_q(\cdot)$ 对三维向量 v 的作用是使其绕 q_v 正方向旋转 θ 角。 证毕。



图 A.2 $L_q(\cdot)$ 使向量 n 绕 u 转动 θ (q_v 方向垂直纸面向外)

附录 B 符号表

1、标量符号

$\omega_{ m e}$	地球自转角速率
φ	大地纬度
λ	经度;载波相位波长
h	大地高
R _M	子午圈曲率半径
R _N	卯酉圈曲率半径
v _N	北向速度
$v_{\rm E}$	东向速度
VD	地(下)向速度
$\omega^{\rm b}_{\rm ib,x/y/z}$	x、y、z 轴陀螺角速度测量值
$f^{\rm b}_{\rm x/y/z}$	x、y、z 轴加速度计比力测量值
b _{g,x/y/z}	x、y、z 轴陀螺零偏
b _{a,x/y/z}	x、y、z 轴加速度计零偏
$\delta s_{g,x/y/z}$	x、y、z 轴陀螺比例因子误差
$\delta s_{a,x/y/z}$	x、y、z 轴加速度计比例因子误差
$W_{g,x/y/z}$	x、y、z 轴陀螺噪声
Wa,x/y/z	x、y、z 轴加速度计噪声
ϕ	横滚角
θ	俯仰角
ψ	航向角
g	重力加速度大小
ρ	卫地距
dt	接收机钟漂
D	多普勒观测值

2、向量符号

$oldsymbol{\omega}_{ ext{ie}}$	地球自转角速度
$oldsymbol{\omega}_{ ext{en}}$	位移角速度
$\mathbf{r}_{ m eb}$	地心位置向量
\mathbf{v}_{eb}	地速
g	引力加速度
f	比力
\mathbf{g}_{p}	重力加速度

$\Delta oldsymbol{ heta}$	角增量
$\Delta \mathbf{v}$	速度增量
\mathbf{b}_{g}	陀螺零偏
\mathbf{b}_{a}	加速度计零偏
$\delta \mathbf{s}_{ m g}$	陀螺比例因子误差
$\delta \mathbf{s}_{\mathrm{a}}$	加速度计比例因子误差
$\mathbf{w}_{ ext{g}}$	陀螺噪声
\mathbf{w}_{a}	加速度计噪声
${oldsymbol{\mathcal{E}}}_{ m Rb}$	从 R 系旋转到 b 系的欧拉角组
q	四元数
\mathbf{q}^*	q 的共轭四元数
$\delta \mathbf{r}$	位置误差
$\delta \mathbf{v}$	速度误差
ϕ	等效旋转矢量 (或特指姿态误差)
l	杆臂向量
$\delta oldsymbol{\omega}^{ m b}_{ m ib}$	陀螺角速度测量误差
$\delta \mathbf{f}^{\mathrm{b}}$	加速度计比力测量误差

3、矩阵符号

$\mathbf{S}_{ ext{g}}$	陀螺比例因子误差构成的对角矩阵
\mathbf{S}_{a}	加速度计比例因子误差构成的对角矩阵
$\mathbf{N}_{ ext{g}}$	陀螺交轴耦合误差矩阵
\mathbf{N}_{a}	加速度计交轴耦合误差矩阵
С	方向余弦矩阵,也称姿态矩阵
\mathbf{I}_{n}	n 阶单位矩阵
${f M}_{ m RV}(oldsymbol{\phi}_{ m Rb})$	罗德里格斯 (Rodrigues) 公式等效函数, 由 ϕ_{Rb} 计算 \mathbf{C}_{b}^{R}

4、其他符号

$\mathbf{a} imes \mathbf{b}$	向量 a 和 b 叉乘
$(\mathbf{a} imes)$	向量 a 的反对称矩阵
$\det\left(\mathbf{A} ight)$	矩阵 A 的行列式
E(x)	随机变量 x 的期望
$\sigma^2(\mathrm{x})$	随机变量 x 的方差
$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma ight)$	均值为 μ 、方差为 σ^2 的正态分布
$\delta(\cdot)$	变量的扰动误差;狄拉克函数
Ŷ	参数 x 的计算值
ñ	参数 x 的观测值
$\langle {f a}, {f b} angle$	向量 a 和 b 的夹角
 ∙	向量或四元数的模

四元数乘法
 diag(a)
 向量 a 构成的对角矩阵

5、名称简写

i系	地心惯性坐标系(earth-centered inertial frame, ECI)
e 系	地心地固坐标系 (earth-centered earth-fixed frame, ECEF)
n 系	导航坐标系 (navigation frame)
v 系	载体坐标系(vehicle-fixed body frame)
b 系	传感器坐标系(sensor-fixed body frame)
R 系	任意参考坐标系(reference frame)
PSD	功率谱密度 (power spectral density)
MEMS	微机电系统(micro-electro-mechanical system)
IMU	惯性测量单元 (inertial measurement unit)
INS	惯性导航系统 (inertial navigation system)
GNSS	全球卫星导航系统(global navigation satellite system)
ppm	百万分之一 (parts per million)
ARW	角度随机游走 (angular random walk)
VRW	速度随机游走 (velocity random walk)
RMS	均方根 (root mean square)
DCM	方向余弦矩阵 (direction cosine matrix)

参考文献

- Braasch M. Fundamentals of Inertial Navigation Systems and Aiding[M]. Stevenage, United Kingdom: The Institution of Engineering, 2022.
- [2] Groves P D. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems[M]. 2nd ed. Boston, United States: Artech House, 2013.
- [3] 高翔, 张涛, 刘毅. 视觉 SLAM 十四讲:从理论到实践[M]. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2019.
- [4] Widnall S. Vectors, Matrices and Coordinate Transformations[EB/OL]. 2009 [2025-04-15]. https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_0 7f09_lec03/.
- [5] Thomas G B, Weir M D, Hass J. Thomas' Calculus: Early Transcendentals[M].13th ed. Boston, United States: Pearson, 2014.
- [6] Torge W, Müller J. Geodesy[M]. 4th ed. Berlin, Germany: De Gruyter, 2012.
- [7] 高钟毓. 惯性导航系统技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [8] National Geospatial-intelligence Agency. Department of Defense World Geodetic System 1984 Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems: NGA.STND.0036[S/OL]. 2014 [2025-04-15]. https://earth-info.nga.mil/index.php ?dir=wgs84&action=wgs84.
- [9] Moritz H. Geodetic Reference System 1980[J]. Journal of Geodesy, 2000, 74:128-133.
- [10] 魏子卿. 2000 中国大地坐标系[J]. 大地测量与地球动力学, 2008, 28(6): 1-5.
- [11] Jekeli C. Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications[M]. 2nd ed. Berlin, Germany: De Gruyter, 2023.
- [12] 严恭敏. 捷联惯导算法与组合导航原理[M]. 2 版. 西安: 西北工业大学出版社, 2023.
- [13] Brown R G, Hwang P Y C. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: With MATLAB Exercises[M]. 4th ed. Hoboken, United States: John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- [14] Maybeck P S. Stochastic Models, Estimation, and Control: vol. 1[M]. Orlando, United States: Academic Press, 1979.
- [15] Riley K F, Hobson M P, Bence S J. Mathematical Methods for Physics and Engineering[M]. 3rd ed. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2006.

- [16] Oppenheim A, Willsky A, Nawab S. Signals and Systems[M]. 2nd ed. Upper Saddle River, United States: Pearson, 1996.
- [17] Titterton D H, Weston J L. Strapdown Inertial Navigation Technology[M]. 2nd ed. Stevenage, United Kingdom: Institution of Electrical Engineers, 2004.
- [18] Savage P G. Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(1): 19-28.
- [19] Savage P G. Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 208-221.
- [20] Research and Technology Organisation. Basic Guide to Advanced Navigation[R]. SET-114/RTG-65(2nd ed). North Atlantic Treaty Organization, 2010.
- [21] Walraven J A. Introduction to Applications and Industries for Microelectromechanical Systems (MEMS)[C]//Proceedings 2003 International Test Conference. Washington, United States: IEEE, 2003: 674-680.
- [22] Geen J A, Sherman S J, Chang J F, et al. Single-Chip Surface Micromachined Integrated Gyroscope with 50°/h Allan Deviation[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2002, 37(12): 1860-1866.
- [23] Research and Technology Organisation. Basic Guide to Advanced Navigation[R]. SET-054/RTG-30. North Atlantic Treaty Organization, 2003.
- [24] 杨立溪. 惯性技术手册[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2013.
- [25] 丁衡高, 朱荣, 张嵘. 微型惯性器件及系统技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.
- [26] 中央军委装备发展部. 惯性技术术语: GJB 585B-2018[S]. 北京: 国家军用标准出版发行部, 2018.
- [27] 严恭敏, 李四海, 秦永元. 惯性仪器测试与数据分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012.
- [28] Riley W J. Handbook of Frequency Stability Analysis[R/OL]. Gaithersburg, United States: National Institute of Standards and Technology, 2008 [2024-12-14]. https: //nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/SP/nistspecialpublication1065.pdf.
- [29] IEEE Standards Board. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros: IEEE Std 647-1995[S]. New York, United States: IEEE, 1995.
- [30] IEEE Standards Board. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros: IEEE Std 952-1997[S].

New York, United States: IEEE, 1997.

- [31] 刘明, 穆杰, 李旦. 应用导航算法工程基础[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2021.
- [32] IEEE Standards Board. IEEE Standard for Inertial Sensor Terminology: IEEE Std 528-1994[S]. New York, United States: IEEE, 1994.
- [33] 万德钧, 房建成. 惯性导航初始对准[M]. 南京: 东南大学出版社, 1998.
- [34] Wahba G. A Least Squares Estimate of Satellite Attitude[J]. SIAM Review, 1965, 7(3): 409-409.
- [35] 袁信, 郑谔. 捷联式惯性导航原理[M]. 北京: 航空专业教材编审组, 1985.
- [36] Pio R L. Euler Angle Transformations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, 11(4): 707-715.
- [37] Savage P G. Strapdown Analytics: vol. 1[M]. Maple Plain, United States: Strapdown Associates, 2000.
- [38] Longuski J M. Solution of Euler's Equations of Motion and Eulerian Angles for Nearsymmetric Rigid Bodies Subject to Constant Moments[C/OL]// Astrodynamics Conference. Danvers, United States: American Institute of Aeronautics, 1980.
- [39] Kuipers J B. Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality[M]. Princeton, United States: Princeton University Press, 1999.
- [40] 勃拉涅茨, 什梅格列夫斯基. 四元数在刚体定位问题中的应用[M]. 梁振和,译. 北京: 国防工业出版社, 1977.
- [41] Goldstein H, Safko J, Poole C P. Classical Mechanics[M]. 3rd ed. Essex, United Kingdom: Pearson, 2014.
- Bortz J E. A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation[J].
 IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1): 61-66.
- [43] Savage P G. Strapdown Analytics: vol. 1[M]. 2nd ed. Maple Plain, United States: Strapdown Associates, 2007.
- [44] 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2016.
- [45] 谢钢. GPS 原理与接收机设计[M]. 北京: 电子工业出版社, 2017.
- [46] Teunissen P, Montenbruck O. Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems[M]. Cham, Switzerland: Springer, 2017.